

MATEMATIKOS MOKYKLA

A. JONUŠAUSKAS



KAS YRA TOPOLOGIJA



**Leidykla „Mintis“
VILNIUS — 1975**

517.6

Jo=201

УДК 513(83)

Что такое топология. Йонушаускас А.

Изд. «Минтис», Вильнюс, 1975, 84 стр. с ил.

В книге изложены первые понятия общей топологии (топологическое пространство, непрерывность функции, предел, компактность, равномерная топология) и с этой общей точки зрения показан истинный смысл основных теорем классического «введения в анализ».

Книга доступна старшеклассникам и может служить пособием для занятий в школьном математическом кружке.

© Leidykla „Mintis“, 1975

0222—075138—74
J M851 (10)—75

— IŽANGA

Knygutės pavadinimas, be abejo, yra per drąsus – geriau tiktų „Topologijos pradžiamokslis“. Iš tikrųjų, topologija, kaip savarankiška matematikos šaka, susiformavusi 19 šimtmečio pabaigoje, taip veržliai vystėsi „į plotį ir gylį“, kad šiandien net specialistas topologas gerai išmano tik kurią nors siaurą topologijos dalį, bet ne visą topologiją. Tačiau sunku rasti šiuolaikinės matematikos sritį, kurioje nebūtų naudojami topologijos rezultatai ir metodai. Pačioms pirmosioms visų vartojamoms topologinėms sąvokoms išdėstyti ir skirta ši knygutė. Pateikiama medžiaga pilnai prieinama vyresniųjų klasių moksleiviams, bet, norint ją įsisavinti, reikia tam tikro atkaklumo. Rekomenduotina knygutę nagrinėti būrelyje – mokytojo parama gali būti labai naudinga. Tolimų šalių gamtovaizdžius galima pamatyti kine, Žalgirio mūšio aprašymą – perskaityti istorijos vadovėlyje, o matematikos neįmanoma pamatyti nei kine, nei iš pasakojimo „apie matematiką“: matematiką reikia pačiam pergyventi, pačiam viską išrodyti. Dar daugiau – patobulinti siūlomus įrodymus, patikslinti teoremas, atrasti naujas! Todėl ir šioje knygutėje viską įrodinėjame (išskyrus § 5, 3 teoremą ir § 6, 1 ir 3 teoremas). Jeigu nurodyta „patikrinkitel“, tai atidus skaitytojas jau tikrai bus tam pasiruošęs ir be vargo pats įrodys. Tokie mažičiai savarankiško mąstymo tarpai (kartu su pratimais) padės teisingai suprasti dėstomą dalyką. Be to, išėjus šiai knygutei, per Jaunųjų matematikų neakivaizdinę mokyklą, veikiančią prie Vilniaus Valsstybinio V. Kapsuko universiteto Matematikos ir mechanikos fakulteto, reguliariai skirsime užduotis topologine tematika. Tai yra principiniai dalykai, ir kuo anksčiau būsimieji matematikai pradės formuoti teisingas matematines pažiūras, tuo bus geriau.

Vidurinės mokyklos matematikos mokyme padvelkė nauji, gaivūs vėjai: matematikos kursas grindžiamas aibių teorijos koncepcija, geometrijoje pagaliau atsisakyta senosios įrodymų sistemos (kuria pasiūlė Euklidas IV a. pr. m. e.). Ši knygutė bus naudinga ir mokytojams – pirmame paragrafe glaustai pateiktos aibių teorijos svarbiausios konstrukcijos (ypač funkcijos sąvoka), o 3–7 paragrafų medžiaga atnaujins ir patikslins žinias apie ribas, tolydumą, tolygų tolydumą, pilnumą ir t. t.

Pora pastabų apie tai, kaip knygutę skaityti. Pradedančiajam reikia skaityti viską iš eilės, išsiaiškinti kiekvieną sakinį, kiekvieną įrodymą ar pastabą. Toks darbas vyks lėtai, apie vieną kurią nors konstrukciją gali tekti galvoti dieną ar net savaitę, ieškoti pavyzdžių, todėl nagrinėjamą medžiagą reikia susieti su žiniomis, gaunamomis pamokose. Nenusiminkite, jei per pusmetį išstudijuosite tik vieną paragrafą. Tekstas smulkiu šriftu yra laisvesnis, kartais be įrodymų, todėl gali būti sunkesnis: prie jo grįšite ir vėliau. Dirbkite – ir atsivers durys į nuostabų pasaulį, kurio vardas – MATEMATIKA. (Tolimesniam studijavimui galima rekomenduoti tik Burbaki, žr. literatūrą.)

Kiekviename paragrafe teoremos, teiginiai, svarbiausi apibrėžimai, pratimai atskirai numeruojami. Formulės žymimos dviem skaičiais: pirmasis reiškia paragrafo numerį, antrasis – formulės numerį tame paragrafe. Įrodymo pabaiga žymima dideliu juodu tašku ●. Knygutės gale surašytos pastabos apie matematikus, paminėtus tekste. Skliaustuose [] įrašytas skaičius reiškia knygos eilės numerį literatūros sąrašelyje.

§ 1. SĄVOKOS IŠ AIBIŲ TEORIJS

Šiame paragrafe pakalbėsime apie standartines aibių teorijos konstrukcijas ir žymėjimus, kurie vėliau bus naudojami be papildomų paaiškinimų. Skaitytojas turi gerai įsisavinti visa tai, kad galėtų skaityti šią knygutę. Aibę galima vaizduoti kaip jos elementų rinkinį, bet ne kiekvienas rinkinys yra aibė: turi būti patenkintos tam tikros aksiomos. Tačiau tos aksiomos,

neleidžiančios atsirasti žinomiems paradoksams*, reikalauja nedaug, todėl aibės sąvoka yra labai bendra. Aibės dalis (t. y. poaibis) yra aibė. Jei X — aibė, tai visų jos poaibių rinkinys yra aibė. Jei X ir Y — aibės, tai visų funkcijų iš X į Y rinkinys taip pat yra aibė. Svarbiausias aibės pavyzdys — visų realiųjų skaičių aibė. Šiandien moksleiviai net pradinėse klasėse operuoja aibėmis, todėl šis paragrafas yra tik jau turimų žinių sisteminimas ir papildymas.

Visų realiųjų skaičių aibę žymėsime R . Tuščia aibė (t. y. aibė, neturinti nė vieno elemento) žymima simboliu $\emptyset$. Užrašas $x \in X$ reiškia, kad x yra aibės X elementas. Tokiu atveju dar sakoma, kad x priklauso aibei X . Vietoj žodžio „elementas“ labai dažnai sakoma „taškas“, laikant šiuos žodžius sinoniminiais. Pavyzdžiui, $3,14 \in R$, $\pi \in R$, $1000000 \in R$. Galima rašyti ir $X \ni x$. Jei y nėra aibės X elementas, tai rašoma $y \notin X$.

Simbolis $=$, parašytas tarp dviejų aibių, tarkime $X = Y$, reiškia, kad X ir Y yra ta pati aibė. Priešingu atveju rašoma $X \neq Y$.

1 pratimas. Tarkime, kad X yra lygties $(x-1)(x-2)(x-4)=0$ sprendinių aibė, o Y — aibė visų tų sveikųjų teigiamų skaičių, iš kurių dalosi skaičius 4. Tada $X=Y$.

Jei aibė X turi nedaug elementų, tai kartais rašoma ne X , o figūriniuose skliaustuose surašomi visi aibės X elementai. Pavyzdžiui, visų arabiškų skaitmenų aibė yra $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Nebūtina ir visus elementus surašyti — svarbu, kad iš užrašo matytume, kokie elementai sudaro aibę. Pavyzdžiui, nelygybių sistemos $100 < x < 1000$ sveikųjų sprendinių aibė yra $\{101, 102, 103, \dots, 998, 999\}$.

Pastaba. Toks aibės užrašymas turi vieną trūkumą: aibės elementai surikiuojami. Tuo tarpu *elementų tvarka nesvarbu*. Pavyzdžiui, aibė $\{0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9\}$ taip pat yra visų arabiškų skaitmenų aibė, t. y. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9\}$.

Užrašas $U \subset X$ (arba $X \supset U$) reiškia, kad U yra aibės X poaibis, t. y.

$$\text{jei } x \in U, \text{ tai } x \in X. \quad (1.1)$$

* Apie tai labai išsamiai ir gana elementariai parašyta [7] knygoje.

Tokiu atveju dar sakysime, kad aibė X aprėpia aibę U .
(1.1) sąlygą galima pasakyti ir šitaip:

fakto „ $x \in U$ “ pasekmė yra faktas „ $x \in X$ “.

Simboliškai tai užrašoma:

$$x \in U \Rightarrow x \in X. \quad (1.1)$$

Pavyzdžiui, visų racionaliųjų skaičių aibė Q yra aibės R poaibis, t. y. $Q \subset R$. Visų sveikųjų skaičių aibė Z yra ir aibės Q , ir aibės R poaibis: $Z \subset Q$, $Z \subset R$. Raide N žymėsime sveikųjų neneigiamų skaičių aibę, t. y. $0 \in N$, $1 \in N$, $2 \in N$ ir t. t. Aišku, kad $N \subset Z$, $N \subset Q$, $N \subset R$.

Iš (1.1) savybės, apibūdinančios poaibį, gauname

$$X \subset X, \emptyset \subset X. \quad (1.2)$$

Iš tikrųjų, jei $x \in X$, tai $x \in X$ (t. y. $x \in X \Rightarrow x \in X$, jei naudosisime simboliu $\Rightarrow$). Tuo priklausomybė $X \subset X$ įrodyta. Priklausomybės $\emptyset \subset X$ įrodymui performuluokime (1.1) sąlygą negatyviai:

$$\text{aibėje } U \text{ nėra tokio elemento, kuris } \notin X. \quad (1.1')$$

(Ar įsitikinate, kad (1.1) ir (1.1') yra ekvivalentiškos sąlygos?) Akivaizdu, kad tuščioji aibė $\emptyset$ turi (1.1') savybę: aibėje $\emptyset$ nėra tokio elemento, kuris nepriklausytų aibei X (nes aibėje $\emptyset$ nėra elementų). Neabejotinai aibė $\emptyset$ turi ir (1.1) savybę (juk (1.1) ir (1.1') ekvivalentiškos!), tačiau to, gal būt, taip ryškiai nematyti.

Aibės X poaibiai yra elementai naujos aibės – visų aibės X poaibių aibės, kurią žymėsime $P(X)$. Vadinasi,

$$U \subset X \text{ tada ir tik tada, kai } U \in P(X). \quad (1.3)$$

Kitais žodžiais:

teiginys „ $U \subset X$ “ yra ekvivalentiškas teiginiui „ $U \in P(X)$ “. Žodis „ekvivalentiškas“ dažnai yra pakeičiamas simboliu $\Leftrightarrow$. Naudodami šį simbolį, (1.3) savybę perrašome taip:

$$U \subset X \Leftrightarrow U \in P(X). \quad (1.3)$$

I simbolį $\Leftrightarrow$ galima žiūrėti kaip į du kartus pavartotą simbolį $\Rightarrow$. Iš tiesų, pavyzdžiui, (1.3) reiškia, kad

$$U \subset X \Rightarrow U \in P(X) \text{ ir } U \in P(X) \Rightarrow U \subset X,$$

t. y.

$$\begin{cases} U \subset X \Rightarrow U \in P(X), \\ U \in P(X) \Rightarrow U \subset X, \end{cases}$$

arba trumpiau

$$U \subset X \Leftrightarrow U \in P(X),$$

arba

$$U \subset X \Leftrightarrow U \in P(X).$$

Iš (1.2) turime, kad, kokia bebūtų aibė X , $X \in P(X)$ ir $\emptyset \in P(X)$. Jei $A \subset P(X)$, t. y. jei A yra aibės $P(X)$ poaibis, tai dar sakysime, kad A yra aibės X poaibių kažkoks rinkinys, arba aibės X poaibių sistema.

Kad būtų aiškiau, kas yra $P(X)$, panagrinėkime pavyzdį. Imkime $X = \{1, 2, 3\}$. Išvardykime visus šios aibės poaibius:

$\emptyset$ – poaibis, kuriame nėra elementų;

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ – trys poaibiai, turintys po vieną elementą;

$\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2\}$ – trys poaibiai, turintys po du elementus (pirmasis iš jų gaunamas išmetus iš X elementą 1, antrasis – išmetus elementą 2, trečiasis – išmetus elementą 3);

$\{1, 2, 3\} = X$ – poaibis, turįs tris elementus.

Taigi, $P(X) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\} \right\}$,

t. y. šiuo atveju $P(X)$ turi $2^3 = 8$ elementus.

2 pratimas. Jei aibė X turi n elementų (n – sveikasis neneigiamas), tai aibė $P(X)$ turi 2^n elementų. (Jei $n=0$, tai $X = \emptyset$ ir $P(X)$ turi tik vieną elementą $\emptyset$, o $1=2^0$.)

Pabrėžiame, kad aibės X elementas x ir aibės X vienelementis poaibis $\{x\}$ yra du skirtingi dalykai: vienelementis poaibis yra visai kitos aibės elementas – aibės $P(X)$ elementas.

Jei aibė X turi daug elementų (ar net be galo daug), tai nusakyti kokį nors poaibį U , išvardijant visus jo elementus, gali būti neįmanoma. Tada nurodoma savybė, tarkime, savybė S , apibūdinanti to poaibio elementus, t. y. aibės X elementas

x priklauso poaibiui U tada ir tik tada, kai x turi savybę S .
Sutrumpintai užrašoma šitaip:

$$U = \{x \in X : x \text{ turi savybę } S\}, \quad (1.4)$$

arba, jei X savaimė suprantama, trumpiau

$$U = \{x : x \text{ turi savybę } S\}.$$

Pavyzdžiai. VI klasės geometrijos vadovėlyje [1] pirmojo paragrafo pirmasis apibrėžimas yra šitoks: „Aibė visų plokštumos taškų, nutolusių duotuoju atstumu nuo duotojo tos plokštumos taško, vadinama apskritimu“. Visų plokštumos taškų aibę pažymėkime $\mathbf{R}^2$ (skaitome: „er du“ arba „er kvadratu“; netrukus bus išaiškinta tokio žymėjimo priežastis). Tarkime, kad „duotasis taškas“ (t. y. apskritimo centras) yra taškas $x_0 \in \mathbf{R}^2$, o „duotasis atstumas“ (t. y. apskritimo spindulio ilgis) yra r . Spindulio r apskritimas su centru taške x_0 , remiantis cituotu apibrėžimu, yra aibės $\mathbf{R}^2$ poaibis

$$A = \{x \in \mathbf{R}^2 : \text{atstumas nuo } x \text{ iki } x_0 \text{ lygus } r\}. \quad (1.5)$$

(1.5) formulę skaitome šitaip: „ A yra aibės $\mathbf{R}^2$ poaibis; būtent, elementas x priklauso poaibiui A tada ir tik tada, kai atstumas nuo x iki x_0 lygus r “. (Pastebėsime, kad dažnai (1.5) formulę skaitoma paprasčiau: „ A yra aibė visų tų x -ų iš $\mathbf{R}^2$, kurių atstumas iki x_0 lygus r “. Pripažinsime, kad tokia frazė yra sklandi, bet ji šiek tiek netiksli.)

Spindulio r skritulys su centru x_0 (žr. minėto VI kl. geometrijos vadovėlio § 1 antrą apibrėžimą) yra aibės $\mathbf{R}^2$ poaibis $\{x \in \mathbf{R}^2 : \text{atstumas nuo } x \text{ iki } x_0 \text{ ne didesnis už } r\}$.

Grįžtant šia proga prie aibės X visų poaibių aibės $\mathbf{P}(X)$, galima paminėti geometrinės figūros (plokštumoje) apibrėžimą (žr. [1], 4 psl.) : F yra geometrinė figūra plokštumoje tada ir tik tada, kai $F \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$, t. y., panaudojus simbolį $\Leftrightarrow$, $F \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^2) \Leftrightarrow F$ – geometrinė figūra plokštumoje. Antai, plokštumos taškas x_0 ir geometrinė figūra, kuriai priklauso tik šis taškas, yra skirtingi dalykai: tokia geometrinė figūra yra aibės $\mathbf{R}^2$ vientaškis poaibis $\{x_0\}$, t. y. $\{x_0\} \in \mathbf{P}(\mathbf{R}^2)$, o taškas x_0 yra aibės $\mathbf{R}^2$ elementas, t. y. $x_0 \in \mathbf{R}^2$.

VI klasės algebros vadovėlio [2] 1 skyriuje (16 psl.) apibrėžtieji „skaičių intervalai“, naudojant (1.4) taisyklę, užrašomi šitaip: jei $a < b$ – kokie nors realieji skaičiai, tai

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}, \\]a, b] &= \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}, \\ [a, b[&= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}, \\]a, b[&= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Tarkime, kad duota aibė X ir $U \subset X$. Poaibio U papildinys $\mathbf{C}U$ yra aibės X poaibis, apibrėžiamas formule

$$\mathbf{C}U = \{x \in X : x \notin U\}, \quad (1.7)$$

t. y. $\mathbf{C}U$ yra rinkinys visų tų aibės X elementų, kurie nepriklauso poaibiui U .

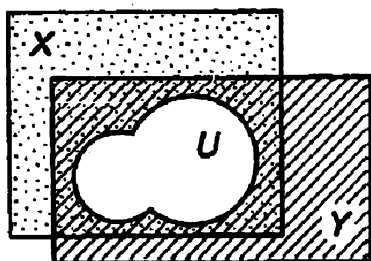
Pavyzdys. Kai aibė X yra realiųjų skaičių aibė $\mathbf{R}$, o $U = \mathbf{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė, tai $\mathbf{C}U$ yra iracionaliųjų skaičių aibė. Pavyzdžiui, $\pi \in \mathbf{C}U$, $\sqrt{2} \in \mathbf{C}U$.

3 pratimas. $\mathbf{C}X = \emptyset$, $\mathbf{C}\emptyset = X$, $\mathbf{C}(\mathbf{C}U) = U$.

Pastaba. Kalbėdami apie poaibio U papildinį, turime galvoje, kad aibė X , kurios poaibis yra U , jau duota, fiksuota. Tikrai, jei aibė X nėra fiksuota, tai nėra prasmės kalbėti apie $\mathbf{C}U$, nes jei $U \subset X$, $U \subset Y$ ir $X \neq Y$, tai

$$\{x \in X : x \notin U\} \neq \{y \in Y : y \notin U\}$$

(1 brėž.: aibė $\{x \in X : x \notin U\}$ taškuota, aibė $\{y \in Y : y \notin U\}$ brūkšniuota).



1 brėž.

Tarkime, kad duota aibė X , $U \subset X$ ir $V \subset X$. Aibių U ir V junginys $U \cup V$ ir sankirta $U \cap V$ yra apibrėžiami formulėmis

$$\begin{aligned} U \cup V &= \{x \in X : x \text{ yra bent vienos iš aibių } U \text{ ir } V \text{ elementas}\}, \\ U \cap V &= \{x \in X : x \in U \text{ ir } x \in V\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

4 pratimas. Duotoje aibėje X bet kuriems jos poaibiams U, V
 $C(U \cup V) = (CU) \cap (CV)$ ir $C(U \cap V) = (CU) \cup (CV)$. (1.9)

Imkime aibes X ir Y . Tada rinkinys visų porų (x, y) , kur $x \in X$, o $y \in Y$, yra aibė; ši aibė vadinama aibių X ir Y sandauga ir žymima $X \times Y$. Jei $(x, y) \in X \times Y$, tai x vadinamas elemento (x, y) pirmąja projekcija, o y – antrąja projekcija. Jei nors viena iš aibių X, Y yra tuščioji aibė $\emptyset$, tai ir sandauga $X \times Y = \emptyset$, nes nėra nė vienos poros (x, y) , kur $x \in X$, o $y \in Y$ (kadangi vienoje iš X, Y nėra elementų).

Pavyzdžiui, jei $X = \{1, 2, 3\}$, o $Y = \{\alpha, \beta\}$, tai $X \times Y = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}$.

5 pratimas. Jei X turi m elementų, o Y turi n elementų ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$), tai $X \times Y$ turi mn elementų.

Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad poroje (x, y) pirmoje vietoje būtinai stovi „pirmojo dauginamojo“ (t. y. aibės X) elementas, o antroje vietoje – „antrojo dauginamojo“ (aibės Y) elementas.

Pavyzdžiui, imkime $X = Y = \{1, 2, 3\}$. Tada

$$X \times Y = X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Taigi, pavyzdžiui, $(1, 2)$ ir $(2, 1)$ yra skirtingi aibės $X \times X$ elementai, nes poroje $(1, 2)$ pirmoje vietoje stovi pirmojo dauginamojo elementas 1, o poroje $(2, 1)$ – elementas 2.

Tuo atveju, kai $X = Y$, aibių sandaugą $X \times Y = X \times X$ dar žymime X^2 (skaitome „iks kvadratu“). Pavyzdžiui, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Jau vartojome simbolį $\mathbb{R}^2$ plokštumos taškų aibei žymėti, – dabar pradeda aiškėti, kodėl pasirinktas būtent toks simbolis. Kaip žinome, įvedus plokštumoje (Dekarto) koordinatinių sistemą, kiekvienas plokštumos taškas apibūdinamas pora realiųjų skaičių – to taško koordinatinių; be to, jei x ir y – kokie nors du realūs skaičiai, tai egzistuoja plokštumos taškas, kurio pirmoji koordinatė yra x , o antroji y . Vadinas, į plokštumos taškų aibę galima žiūrėti kaip į aibę $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Funkcijos sąvokai išsiaiškinti yra svarbūs kai kurie aibės $X \times Y$ poaibiai: poaibiai, kurie nusako funkcijas, apibrėžtas aibėje X ir ilygiančias reikšmes aibėje Y . $G \subset X \times Y$ yra toks aibės $X \times Y$ poaibis tada ir tik tada, kai G turi savybę:

jei $x \in X$, tai aibėje G egzistuoja – ir tik vienas – elementas, kurio pirmoji projekcija yra x ; (1.10)

tarkime, kad tas elementas yra (x, y_x) .

Pavyzdys. Jei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{\alpha, \beta\}$, tai (1.10) savybę turi šie aibės $X \times Y$ poaibiai:

$$G_1 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (3, \alpha)\},$$

$$G_2 = \{(1, \beta), (2, \alpha), (3, \alpha)\},$$

$$G_3 = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\},$$

$$G_4 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (3, \beta)\},$$

$$G_5 = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \beta)\},$$

$$G_6 = \{(1, \beta), (2, \alpha), (3, \beta)\},$$

$$G_7 = \{(1, \beta), (2, \beta), (3, \alpha)\},$$

$$G_8 = \{(1, \beta), (2, \beta), (3, \beta)\}.$$

Matome, kad kiekvienas iš jų turi po tris elementus – lygiai tiek, kiek elementų turi aibė X , nes kiekvienas aibės X elementas turi būti sutinkamas tik vienoje poroje (savybė (1.10)).

Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad jei x_1 ir x_2 – skirtingi aibės X elementai, o (x_1, y_{x_1}) ir (x_2, y_{x_2}) – poaibio G , turinčio (1.10) savybę, elementai, tai y_{x_1} ir y_{x_2} gali būti skirtingi, o gali ir sutapti.

Pavyzdyje aibėje G_1 (ir aibėje G_8) jie nėra skirtingi, o aibėse $G_2, G_3, \dots, G_7$ visai būna. Pavyzdžiui, aibėje G_2 $(1, \beta)$ ir $(2, \alpha)$ turi skirtingas antrąsias projekcijas, o $(2, \alpha)$ ir $(3, \alpha)$ – vienodas.

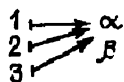
Taigi elemento $(x, y_x) \in G$ antroji projekcija (t. y. $y_x \in Y$) priklauso nuo x ; norėdami tai pabrėžti ir rašėme y_x („igrekas su indeksu iks“).

Aibės $X \times Y$ poaibis G , turįs (1.10) savybę, nustato atitinkamą

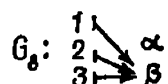
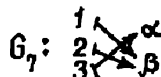
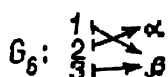
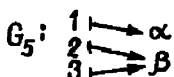
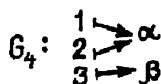
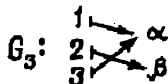
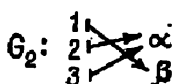
$$x \mapsto y_x \quad (1.11)$$

(tarp aibės X ir aibės Y), kuri vadinama funkcija, apibrėžta aibėje X ir įgyjančia reikšmes aibėje Y , trumpiau funkcija $X \rightarrow Y$. Būtent, (1.11) funkcijos reikšmė taške x yra y_x . Pats poaibis G tada vadinamas (1.11) funkcijos grafiku.

Pastaba. Kaip tik tokia terminologija naudojama dabartiniame VI klasės algebros vadovėlyje [2], žr. 65–68 psl. Ten sakoma, kad atitinkamybė nustatoma rodyklėmis (65 psl.) ir kad „kiekvieną rodyklę galima pakeisti pora“ (66 psl.). Naudojant rodykles, atitinkamybė, kurią nustato, pavyzdžiui, aibė G_1 , atrodo šitaip:



Pateikiame taip pat atitinkamybų, kurias nustato aibės G_2 , ..., G_8 , pavaizdavimą rodyklėmis:



VI klasės algebros vadovėlio 68 psl. parašytas funkcijos apibrėžimas sutampa su čia duotuoju.

(1.11) funkcija dažnai užrašoma šitaip:

$$X \ni x \mapsto y_x \in Y \quad (1.11)$$

Iš šitokio užrašo aiškiai matome, kad čia yra funkcija $x \mapsto y_x$, apibrėžta aibėje X ir įgyjanti reikšmes aibėje Y . Tačiau labiausiai paplitęs yra užrašas

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y \quad (1.12)$$

arba, trumpiau, $x \mapsto f(x)$. Sakome, kad čia yra funkcija f ir rašome $f: X \rightarrow Y$. (Atkreipkite dėmesį, kad (1.12) formulėje sto-

vi strėlė $\mapsto$, o užrašę $f: X \rightarrow Y$ – strėlė $\rightarrow$.) Funkciją f nusakantis aibės $X \times Y$ poaibis G tada yra šitoks:

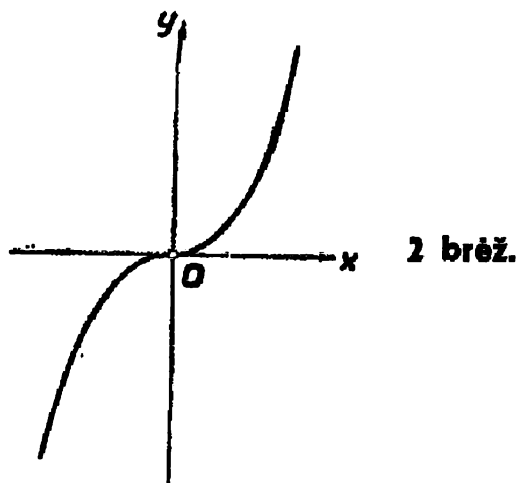
$$G = \{ (x, f(x)) \in X \times Y : x \in X \}. \quad (1.13)$$

Pastaba. Prie funkcijos sąvokos priėjome čia tokiu keliu, kaip dabartiname VI kl. algebros vadovėlyje: aibės $X \times Y$ poaibis G , turįs savybę (1.10), nustato atitinkamą $x \mapsto y_x$ tarp aibių X ir Y , kuri yra funkcija $X \rightarrow Y$. Užrašas (1.12) sukelia mintį, kad atitinkamą tarp aibių X ir Y , kuri būtų funkcija $X \rightarrow Y$, galima nusakyti ne poaibiu G , turinčiu (1.10) savybę, o tiesiog nurodant dėsni f , pagal kurį kiekvienam aibės X elementui priskiriama po vieną aibės Y elementą (būtent, elementui x priskiriamas elementas $f(x)$). Tada (1.13) aibė turi (1.10) savybę ir yra funkcijos f grafikas.

Pavyzdžiui, tarkime, kad $X = Y = \mathbb{R}$, o dėsnis f yra šitoks: „skaičių $x \in \mathbb{R}$ reikia pakelti trečiuoju laipsniu“, t. y. $f(x) = x^3$. Tai bus funkcija

$$x \mapsto x^3.$$

Šios funkcijos grafikas yra aibė $G = \{ (x, x^3) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \}$. Įsivaizduojant aibę $\mathbb{R}^2$ plokštumą, ši aibė G yra kreivė, kurios lygtis $y = x^3$ (2 brėž.).



Tarkime, kad $f: X \rightarrow Y$ ir $g: Y \rightarrow Z$ – funkcijos. Tada atitinkamą

$$X \ni x \mapsto g(f(x)) \in Z \quad (1.14)$$

yra funkcija $X \rightarrow Z$, kurį vadinama funkcijų f ir g kompozicija ir žymima $g \circ f$. Pavyzdžiui, funkcija $x \mapsto \sqrt[3]{2x+1}$ yra funkcijų $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x+1 \in \mathbb{R}$ ir $\mathbb{R} \ni y \mapsto \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ kompozicija.

Jei duota (1.12) funkcija, tai aibė

$$\{f(x) \in Y : x \in X\} \quad (1.15)$$

yra vadinama funkcijos f reikšmių aibe ir žymima $f(X)$. Bendriau, jei $X' \subset X$, tai

$$f(X') = \{f(x) \in Y : x \in X'\}. \quad (1.16)$$

Dar sakoma, kad $f(X')$ yra aibės X' *vaizdas*, gautas su funkcijos f pagalba, arba kad funkcija f aibę X' *perveda* į aibę $f(X')$. Jei $Y' \subset Y$, tai aibės Y' *pirmavaizdis* (esant duotai funkcijai f) yra žymimas $f^{-1}(Y')$ ir apibrėžiamas formule

$$f^{-1}(Y') = \{x \in X : f(x) \in Y'\}. \quad (1.17)$$

Jei $Y' \cap f(X) = \emptyset$, tai $f^{-1}(Y') = \emptyset$.

6 pratimas. $P(X) \ni X' \mapsto f(X') \in P(Y)$ yra funkcija.

$P(Y) \ni Y' \mapsto f^{-1}(Y') \in P(X)$ yra funkcija.

Jei, kokį bepaimtumė $y \in f(X)$, aibė $f^{-1}(\{y\})$ turi tik vieną elementą, tai funkcija f vadinama *injektyvia funkcija*, arba *injekcija* (aibės X į aibę Y).

7 pratimas. Funkcija $f : X \rightarrow Y$ yra *injektyvi* tada ir tik tada, kai ji turi savybę

$$x_1 \in X, x_2 \in X \text{ ir } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2). \quad (1.18)$$

8 pratimas. Jei $f : X \rightarrow Y$ – injekcija ir $g : Y \rightarrow Z$ – injekcija, tai $g \circ f : X \rightarrow Z$ – injekcija.

Pavyzdžiai. Funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ yra *injektyvi*. Jei X – aibė, tai funkcija $X \ni x \mapsto \{x\} \in P(X)$ yra *injektyvi*; šios funkcijos reikšmių aibė yra visų vienelemenčių aibės X poaibių aibė.

Injektyvi funkcija $f : X \rightarrow Y$, kurios reikšmių aibė $f(X)$ sutampa su visa aibe Y (t. y. $f(X) = Y$), yra vadinama *bijektyvia funkcija*, arba *bijekcija* (aibės X ant aibės Y). (Tada dar sakoma, kad f yra *abipus vienareikšmė funkcija*.) Pavyzdžiui, funkcija $x \mapsto x^3$ yra *bijekcija* ($\mathbb{R}$ ant $\mathbb{R}$).

9 pratimas. Jei $f: X \rightarrow Y$ – injekcija, tai $f: X \rightarrow f(X)$ – bijekcija. Jei $f: X \rightarrow Y$ ir $g: Y \rightarrow Z$ – bijekcijos, tai $g \circ f: X \rightarrow Z$ – bijekcija.

Tuo atveju, kai $f: X \rightarrow Y$ yra bijekcija, egzistuoja svarbi funkcija $Y \rightarrow X$, kuri nusakoma šitaip: jei $y \in Y$, tai egzistuoja – ir tik vienas – toks $x \in X$, kad $f(x) = y$, todėl atitinkamybė

$$Y \ni f(x) \mapsto x \in X \quad (1.19)$$

yra funkcija, apibrėžta aibėje Y ir įgyjanti reikšmes aibėje X . Ši funkcija taip pat yra bijekcija (bet jau aibės Y ant aibės X); ji vadinama funkcija, atvirkštine funkcijai f , ir žymima f^{-1} . Taigi

$$Y \ni y \mapsto f^{-1}(y) = x \in X; \text{ čia } f(x) = y. \quad (1.19)$$

Pavyzdžiai. Funkcijai $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ atvirkštinė funkcija yra $\mathbb{R} \ni y \mapsto \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$. Funkcijai $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2x - 1 \in \mathbb{R}$ (patikrinkite, kad tai yra bijekcija) atvirkštinė funkcija yra $\mathbb{R} \ni y \mapsto \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$. Funkcijai $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \ni x \mapsto \sin x \in [-1; 1]$ (patikrinkite, kad tai bijekcija) atvirkštinė funkcija yra $[-1; 1] \ni y \mapsto \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

10 pratimas. Kokioms funkcijoms yra atvirkštinės šios funkcijos: $\log_2 y$, $\arccos y$, $\arctg y$, $\operatorname{arctg} y$?

Pastaba. Jei $f: X \rightarrow Y$ – bijekcija, o $y \in Y$, tai $f^{-1}(y) = x \in X$ (žr. (1.19)), o $f^{-1}(\{y\}) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ (žr. (1.17)); čia $f(x) = y$.

Nukrypstant nuo temos, galima paminėti aibių galios sąvoką, kuri begalinių aibių atveju yra aibės elementų skaičiaus analogas. Būtent, dvi aibės X ir Y vadinamos lygiagalėmis, jei egzistuoja bijekcija $X \rightarrow Y$. Natūralu vaizduotis, kad lygiagalės aibės turi „po lygiai“ elementų: juk bijekcija $f: X \rightarrow Y$ „suporuoja“ tų aibių elementus – x yra poroje su $f(x)$. Tačiau su begalinėmis aibėmis tuoj turime nemalonumų. Pavyzdžiui, funkcija $n \mapsto 2n$ yra bijekcija sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ ant visų lyginių sveikųjų skaičių aibės, t. y. aibė $\mathbb{Z}$ turi „tiek pat“ elementų, kaip ir jos poaibis $\{2n \in \mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$. Arba vėl: funkcija $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ni x \mapsto \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$ yra

bijekcija skaičių intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ant visų realiųjų skaičių aibės $\mathbf{R}$, t. y. intervalas $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ turi „tiek pat“ elementų, kaip ir visa aibė $\mathbf{R}$. Galima įrodyti, kad jei X – begalinė aibė (jos elementų skaičius nebaigtinis), tai egzistuoja jos poaibis $X' \neq X$, lygiagalis su X . Baigtinės aibės neturi tokios paradoksalios savybės. (Smulčiau apie tai žr. [7].)

Funkcijai žymėti dažniausiai vartosime (1.12) pavidalo užrašą, bet ne visada. Štai du svarbiausi atvejai, kai vartosime (1.11) užrašą: 1) sekai žymėti ir 2) poaibių šeimai žymėti.

Bet kuri funkcija $N \rightarrow Y$ yra vadinama seką aibėje Y (primename, kad raide N žymime visų sveikųjų neneigiamų skaičių aibę). Šiuo atveju paprastai vartojamas (1.11) užrašas

$$N \ni n \mapsto y_n \in Y.$$

Rašoma ir šitaip:

$$(y_n)_{n \in N}, \quad (1.20)$$

arba tik (y_n) . Dar rašoma, kad turime seką $y_0, y_1, y_2, \dots$; elementas y_n vadinamas (1.20) sekos n -ju nariu.

Bet kuri funkcija $A \rightarrow P(X)$ (čia A – aibė, o $P(X)$ – bet kokios aibės X visų poaibių aibė) yra vadinama aibės X poaibių šeima. Tokiai funkcijai žymėti taip pat dažniau vartojamas (1.11) pavidalo užrašas

$$A \ni \alpha \mapsto U_\alpha \in P(X), \quad (1.21)$$

arba $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, ar net (U_α) . U_α galima vadinti šeimos (U_α) α -ju nariu.

Pastaba. Nepatyręs skaitytojas, matęs gal tik seką $n \mapsto \frac{1}{2^n}$, t. y. seką $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$, gali pamanyti, kad seką (y_n) – tai elementų $y_0, y_1, y_2, \dots$ aibė – aibės Y poaibis. Pirmiausia $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ ne visada yra aibė. Pavyzdžiui, jei $Y = \mathbf{R}$, tai

$$N \ni n \mapsto 1 + (-1)^n \in \mathbf{R}$$

yra seka $2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots$ ir $\{2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots\}$ nėra aibė. Aibę sudaro funkcijos $n \mapsto 1 + (-1)^n$ reikšmės: tai – aibė $\{0, 2\} \in P(\mathbf{R})$.

Jei $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ ir yra aibė (t. y. jei $n \neq k \Rightarrow y_n \neq y_k$), tai ji turi papildomą savybę: jos elementai yra sunumeruoti aibės N elementais. Lygiai taip pat aibės X poaibių šeima nėra aibės $P(X)$ poaibis. Aibės $P(X)$ poaibių yra funkcijos $\alpha \mapsto U_\alpha$ reikšmių aibė. Tuo būdu, sąvokos „aibės X poaibių rinkinys“, „aibės X poaibių sistema“, „aibės $P(X)$ poaibis“ yra sinonimai, o sąvoka „aibės X poaibių šeima“ reiškia visai ką kitą.

Pavyzdys. Funkcija $R \ni x \mapsto U_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} \in P(\mathbb{Z})$ yra sveikųjų skaičių aibės $\mathbb{Z}$ poaibių šeima. Pavyzdžiui, $U_{-1} = U_{-\frac{1}{2}} = U_{-\frac{2}{3}}$ yra visų sveikųjų neigiamų skaičių aibė, o $U_3 = U_{3.14} = U_\pi = U_{3.9} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Vis dėlto, atrodo, skaitytojas protestuoja prieš tai, kad aibių šeima laikoma funkcija: norisi vaizduotis kaip aibių kolekciją – tegul ir sunumeruotą aibės A elementais, tegul ir su pasikartojančiais egzemplioriais. Ką gi, galima ir taip. Aibę A vaizduokimės kaip tuščią* albumą, turintį tiksliai tiek lapų, kiek elementų turi aibė A (t. y. albumo lapai sunumeruoti aibės A elementais). Jei duota (1.21) funkcija ir $\alpha \in A$, tai pasidarykime aibės U_α kopiją ir įklijuokime ją (kaip filatelistas retą pašto ženklą) albumo α -me lape. Tokiu būdu užpildysime visą albumą, ir aibių šeima (1.21) bus atvaizduota kaip aibių kolekcija. Toje kolekcijoje gali pasitaikyti ir vienodų „pašto ženklų“. Analogiškai galima interpretuoti ir seką (ar net bet kokią funkciją) $A \ni \alpha \mapsto y_\alpha \in Y$ nes ją irgi galima vadinti šeima – aibės Y elementų šeima).

Kiek yra funkcijų, apibrėžtų aibėje X , įgyjančių reikšmes aibėje Y ? – Tiek, kiek aibėje $X \times Y$ poaibių, turinčių (1.10) savybę.

Pavyzdžiui, jei $X = \{1, 2, 3\}$, o $Y = \{\alpha, \beta\}$, tai, kaip matėme, egzistuoja 8 funkcijos $X \rightarrow Y$. Atidus skaitytojas galėjo atkreipti dėmesį, kad ir aibė $P(X)$, kai $X = \{1, 2, 3\}$, turi 8 elementus. Tai nėra atsitiktinumas: kokia bebūtų aibė X , aibė $P(X)$ turi tiek elementų, kiek yra funkcijų, apibrėžtų aibėje X ir įgyjančių reikšmes dviementėje aibėje Y . Iš tikrųjų, sakykime, $Y = \{\alpha, \beta\}$. Jei $f : X \rightarrow Y$, tai $f^{-1}(\{\beta\}) \in P(X)$, ir jei $f_1 \neq f_2$ – dvi funkcijos $X \rightarrow Y$, tai $f_1^{-1}(\{\beta\}) \neq f_2^{-1}(\{\beta\})$. Atvirkščiai, jei $B \subset X$, tai atitinkamybė

$$x \mapsto \begin{cases} \alpha, & \text{jei } x \in CB, \\ \beta, & \text{jei } x \in B, \end{cases}$$

* Ta prasme tuščią, kad nė viename albumo lape nieko neįklijuota.

yra funkcija $X \rightarrow Y = \{\alpha, \beta\}$, ir jei $B_1 \neq B_2$ – du aibės X poaibiai, tai tokiu būdu gaunamos funkcijos $X \rightarrow Y$ yra skirtingos. Iš čia matome, kad atitinkamybė

$$f \mapsto f^{-1}(\{\beta\}) \quad (1.22)$$

yra bijekcija visų funkcijų $X \rightarrow Y$ aibės ant aibės $P(X)$.

Kaip minėjome, jei $X = \emptyset$, tai $X \times Y = \emptyset$. Šiuo atveju aibės $X \times Y$ tuščiasis poaibis $\emptyset$ (jis, beje, sutampa su visa aibe $X \times Y$) turi (1.10) savybę. (Tą ypač ryškiai matysime, jei (1.10) suformuluosime negatyviai: „nėra tokio $x \in X$, kuris būtų bent dviejų aibės G elementų pirmoji projekcija“.) Vadinasi, *egzistuoja* (ir tik viena) funkcija $X \rightarrow Y$ ir tuo atveju, kai $X = \emptyset$; šiuo atveju net ir Y gali būti tuščia.

Pavyzdžiui, jei $A = \emptyset$, o X – bet kokia aibė, tai $A \rightarrow P(X)$ yra vadinama aibės X poaibių tuščiąja šeima.

Visų funkcijų $X \rightarrow Y$ aibė dažnai žymima Y^X . Išsiaiškiname, ką bendro tai turi su kėlimo laipsniu veiksmu. Į anksčiau apibrėžtą dviejų aibių sandaugą galima žiūrėti dar ir taip: tarkime, kad U_1, U_2 – aibės X poaibiai; aibės $U_1 \times U_2$ bet kurį elementą (x_1, x_2) ($x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$) galima traktuoti kaip funkciją $\{1, 2\} \rightarrow X$, kuri $1 \mapsto x_1 \in U_1, 2 \mapsto x_2 \in U_2$. Taigi $U_1 \times U_2$ yra aibė visų tokių funkcijų.

Visiškai taip pat apibrėžiama bet kokios aibių šeimos $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ($U_\alpha \in P(X)$) sandauga: ji yra aibė visų tokių funkcijų $f: A \rightarrow X$, kad $f(\alpha) \in U_\alpha$. Aibių šeimos $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ sandauga yra žymima

$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, arba $\Pi\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Jei, kokį nepaimtume $\alpha \in A$, $U_\alpha = X$, tai

vietoj $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ tiesiog rašome X^A . Tai yra aibė visų tokių funkcijų

$f: A \rightarrow X$, kad $f(\alpha) \in U_\alpha = X$, t. y. X^A yra aibė visų funkcijų $A \rightarrow X$.

Pastaba. Minėjome, kad jei aibė X turi n elementų, tai aibė $P(X)$ turi 2^n elementų. Be to, parodėme, kad aibė $P(X)$ turi tiek elementų, kiek yra funkcijų $X \rightarrow Y$, kur aibė Y turi du elementus, t. y. (1.22) atitinkamybė yra bijekcija aibės Y^X ant $P(X)$; vietoj dvelementės aibės Y kartais tiesiog rašoma 2 ir aibė $P(X)$

dar žymima 2^X . Šis užrašas, kai aibė X turi n elementų, primena, kad aibė $P(X) = 2^X$ turi 2^n elementų.

Kalbant apie aibių šeimos sandaugą, jei $A = \{1, 2, \dots, n\}$, aibė

$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ dažniau žymima $U_1 \times \dots \times U_n$ arba $\prod_{i=1}^n U_i$, o jos elemen-

tas užrašomas $(x_1, \dots, x_n)$; čia $x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$. Jei $U_1 = \dots = U_n = U$ tai $U \times U \times \dots \times U$ (n dauginamųjų) trumpiau žymime U^n . Pavyzdžiui, $\mathbb{R}^n$.

Apibrėšime dvi svarbias funkcijas $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, būtent: $\mathbb{R}^n \ni (c_1, \dots, c_n) \mapsto$ didžiausias iš $c_1, \dots, c_n$ ir $\mathbb{R}^n \ni (c_1, \dots, c_n) \mapsto$ mažiausias iš $c_1, \dots, c_n$. Didžiausias iš skaičių $c_1, \dots, c_n$ žymimas simboliu $\max \{c_1, \dots, c_n\}$, o mažiausias iš $c_1, \dots, c_n$ — simboliu $\min \{c_1, \dots, c_n\}$. Taigi minėtos funkcijos yra

$$\mathbb{R}^n \ni (c_1, \dots, c_n) \mapsto \max \{c_1, \dots, c_n\} \text{ ir } \mathbb{R}^n \ni (c_1, \dots, c_n) \mapsto \min \{c_1, \dots, c_n\}. \quad (1.23)$$

(1.8) formulėmis apibrėžtą dviejų aibių junginį ir sankirtą galime apibendrinti bet kuriai poaibių šeimai. Jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — kokia nors aibės X poaibių šeima (žr. (1.21)), tai tos aibių šeimos junginys $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ir sankirta $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ apibrėžiami šitaip:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha &= \{x \in X : \text{egzistuoja } \alpha \in A \text{ toks, kad } x \in U_\alpha\}, \\ \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha &= \{x \in X : \text{jei } \alpha \in A, \text{ tai } x \in U_\alpha\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Kartais būna patogų užrašyti* $\bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, $\bigcap \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, panašiai kaip aibių sandaugą $\prod \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Jei aišku, apie kokią šeimą (U_α) kalbama, tai rašoma trumpai: $\bigcup U_\alpha$, $\bigcap U_\alpha$, $\prod U_\alpha$ (junginys, sankirta, sandauga).

Pavyzdys. Jei $A = \emptyset$, tai

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset, \quad \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = X, \quad (1.25)$$

* Aibių junginiui žymėti naudosime tiek ir simbolių $\bigcup$, tiek ir simbolių $\bigcup$. Analogiškai, ir $\bigcap$, ir $\bigcap$ reikš aibių sankirtą, o $\prod$ arba $\prod$ — aibių sandaugą.

t. y. aibės X tuščios poaibių šeimos junginys yra tuščia aibė, o sankirta yra visa aibė X . Tikrai, koki bepaimtume $x \in X$, jis nepriklauso aibei $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, nes nėra nė vieno α , priklausančio aibei $A = \emptyset$, todėl nėra ir U_α , kuriai priklausytų x . Užtat sąlygą „jei $\alpha \in A$, tai $x \in U_\alpha$ “, kai $A = \emptyset$, tenkina kiekvienas aibės X elementas x , nes ši sąlyga dabar nieko nereikalauja: kadangi nėra nė vieno α , priklausančio aibei A , tai nėra ir U_α ir x neturi jokių „įpareigojimų“.

Jei $A = \{1, 2, \dots, n\}$, tai vietoj $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ir $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ kartais būna patogiau rašyti $\bigcup_{i=1}^n U_i$, $\bigcap_{i=1}^n U_i$, arba $U_1 \cup \dots \cup U_n$, $U_1 \cap \dots \cap U_n$.

Akivaizdžios savybės

$(U_1 \cup U_2) \cup U_3 = U_1 \cup (U_2 \cup U_3)$ ir $(U_1 \cap U_2) \cap U_3 = U_1 \cap (U_2 \cap U_3)$ visu bendrumu atrodo šitaip: jei $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ($(A_i)_{i \in I}$ – kokia nors aibės A poaibių šeima), tai

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{\alpha \in A_i} U_\alpha \right) \quad (1.26)$$

ir

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\alpha \in A_i} U_\alpha \right). \quad (1.27)$$

(1.26) formulės įrodymas. Jei $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, tai egzistuoja toks $\alpha_0 \in A$, kad $x \in U_{\alpha_0}$. Kadangi $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, tai egzistuoja toks $i_0 \in I$, kad $\alpha_0 \in A_{i_0}$. Vadinasi, $x \in \bigcup_{\alpha \in A_{i_0}} U_\alpha$, todėl $x \in \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{\alpha \in A_i} U_\alpha \right)$. Atvirkščiai, jei $x \in \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{\alpha \in A_i} U_\alpha \right)$, tai yra toks $i_0 \in I$, kad $x \in \bigcup_{\alpha \in A_{i_0}} U_\alpha$. Todėl egzistuoja toks $\alpha_0 \in A_{i_0}$, kad $x \in U_{\alpha_0}$. Vadinasi, $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, nes $\alpha_0 \in A$.

(1.27) formulės įrodymas. Jei $x \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$, tai, koki bepaimitume $\alpha \in A$, yra $x \in U_\alpha$. Todėl $x \in \bigcap_{\alpha \in A_i} U_\alpha$ kiekvienam $i \in I$. Reiškia, $x \in \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\alpha \in A_i} U_\alpha \right)$. Atvirkščiai, jei $x \in \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\alpha \in A_i} U_\alpha \right)$, tai, kiekvienam $i \in I$, yra $x \in \bigcap_{\alpha \in A_i} U_\alpha$, taigi $x \in U_\alpha$ visiems $\alpha \in A_i$, o todėl ir visiems $\alpha \in A$, nes $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Tikrinant formules, užrašytas sekančiuose pratimuose, daroma analogiškai.

11 pratimas. Jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – aibės X poaibių šeima, tai

$$C \left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (C U_\alpha). \quad (1.28)$$

Jei $(U'_\beta)_{\beta \in B}$ – taip pat aibės X poaibių šeima, tai

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} U'_\beta \right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (U_\alpha \cap U'_\beta), \quad (1.29)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cup \left(\bigcap_{\beta \in B} U'_\beta \right) = \bigcap_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (U_\alpha \cup U'_\beta). \quad (1.30)$$

§ 3 naudosime (1.29) formulės apibendrinimą n šeimoms $(U_\alpha)_{\alpha \in A_1}, \dots, (U_\alpha)_{\alpha \in A_n}$.

Tada yra

$$\begin{aligned} & \left(\bigcup_{\alpha \in A_1} U_\alpha \right) \cap \dots \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A_n} U_\alpha \right) = \\ & = \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} (U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

12 pratimas. Jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – aibės X poaibių šeima, o $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ – aibės Y poaibių šeima (su ta pačia indeksų aibe A), tai

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \times \left(\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (U_\alpha \times V_\alpha). \quad (1.32)$$

Šią formulę naudosime § 3. Bendriau, jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – aibės X poaibių šeima, o $(V_\beta)_{\beta \in B}$ – aibės Y poaibių šeima (jau nebūtinai $A=B$), tai

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \times \left(\bigcap_{\beta \in B} V_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (U_\alpha \times V_\beta). \quad (1.33)$$

13 pratimas. Jei $f: X \rightarrow Y$ – funkcija, o $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – aibės X poaibių šeima, tai

$$f\left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f(U_\alpha), \quad (1.34)$$

bet

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in A} f(U_\alpha), \quad (1.35)$$

(Sugalvokite pavyzdį, kada $f(U_1 \cap U_2) \neq f(U_1) \cap f(U_2)$). Jei $(V_\beta)_{\beta \in B}$ – aibės Y poaibių šeima, tai

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\right) = \bigcup_{\beta \in B} f^{-1}(V_\beta), \quad (1.36)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\beta \in B} V_\beta\right) = \bigcap_{\beta \in B} f^{-1}(V_\beta). \quad (1.37)$$

§ 2. FILTRAI

Jei žodis, naudojamas matematikoje, turi ir kasdienę, buitinę prasmę, tai juo pavadintoji matematinė sąvoka turi analogiją su ana, nematematine, šio žodžio prasme. Taip ir filtras: praleidžia tai, kas pro jo sietelius pralenda, o visa kita – sulaiko. Geras filtras turi ne vieną sietelį, o kelis. Pavyzdžiui, sijojant miltus, grubus sietas sulaiko sėlenas; tankesnis sietelis sulaiko trečiarūšius, rupius miltus; ant dar tankesnio sietelio susirenka antrarūšiai; ant sekančio sieto surenkami pirmarūšiai, o išbyrantieji ir pro jį yra baltutėliai smulkutėliai aukščiausios rūšies miltai.

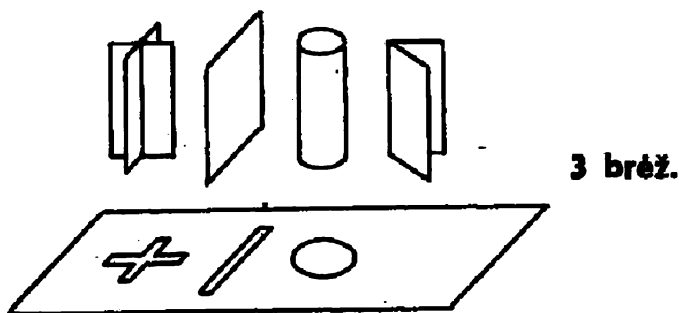
Panašiai atrodo filtrai, kurie naudojami matematikoje. Tai yra filtrai netuščiose aibėse. Imkime kokią nors netuščią aibę X . Kadangi kiekvienas aibės elementas yra „individas“, turįs savo „veidą“ (t. y. požymį, pagal kurį jis atpažįstamas, atskiriamas nuo kitų tos aibės elementų), tai aibės X elementus galima vaizduotis skirtingos formos daiktais. Filtrą F aibėje X sudaro tam tikras „sietelių“ rinkinys. „Sietelis“ yra, tarkime, skardos gabalas, kuriame išpiautos kelios skirtingų formų skylutės (o gal ir be galo daug skylių). Per

kurią nors skylutę iškrenta tik vienas aibės X elementas — tas, kurio forma tokia, kaip skylutės forma. Pavyzdžiui, jei $X = \{+, -, 0, <\}$, tai šią aibę ir „sietelį“, per kurį iškristų elementai $+$, $-$ ir 0 , galima taip nupiešti, kaip 3 brėžinyje. Schematiškai tai galima šitaip pavaizduoti:

$\{+, -, 0, <\}$ — aibė X ,

$\boxed{+, -, 0}$ — „sietelis“.

Iš čia matome, kad į „sietelį“ galima žiūrėti kaip į aibės X poaibį, t. y. kad filtras yra aibės X poaibių („sietelių“) tam tikras rinkinys. Formuluojuame tikslų apibrėžimą.



1 apibrėžimas. *Filtras aibėje X yra aibės $P(X)$ netuščias poaibis F , turįs savybes*

(F_I) *jei $E \in P(X)$ ir jei egzistuoja $F \in F$ tokia, kad $F \subset E$, tai $E \in F$;*

(F_{II}) *jei $F_1 \in F$ ir $F_2 \in F$, tai $F_1 \cap F_2 \in F$;*

(F_{III}) $\emptyset \notin F$.

Aibės F elementus vadinsime sieteliais, iš kurių sudarytas filtras F .

Aksioma (F_{III}) reiškia, kad *filtre nėra sietelio, pro kurį neiškristų nė vienas elementas.*

Pavyzdys. Aibėje $X = \{+, -, 0, <\}$ sieteliai

$+$	$-$	0	$<$
$+$	$-$	0	
	$-$	0	$<$
	$-$	0	

sudaro filtrą, t. y. aibės X poaibių rinkinys $F = \left\{ \{+, -, 0, <\}, \{+, -, 0\}, \{-, 0, <\}, \{-, 0\} \right\}$ tenkina filtro apibrėžimo reikalavimus.

1 pratimas. Jei U – netuščias aibės X poaibis, tai visi tie aibės X poaibiai, kurie aprėpia U , sudaro filtrą aibėje X .

Išvados iš filtro apibrėžimo. Tarkime, kad F – filtras aibėje X . Tada

- 1) $X \in F$;
- 2) $F \neq P(X)$;
- 3) $X \neq \emptyset$, t. y. tuščioje aibėje filtrų nėra;
- 4) jei $(F_i)_{i \in I}$ – baigtinė* aibės F elementų šeima, tai

$$\bigcap_{i \in I} F_i \in F; \text{ todėl } \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset.$$

Šios išvados tiesiogiai gaunamos iš 1 apibrėžimo. Rekomenduojame skaitytojui tai padaryti savarankiškai. Tačiau pridėdame ir įrodymą:

1) kadangi F yra netuščias aibės $P(X)$ poaibis, tai egzistuoja $F \in F$. Bet $F \subset X$, todėl iš (F_1) gauname, kad $X \in F$;

2) $\emptyset \in P(X)$, bet $\emptyset \notin F$;

3) kadangi $X \in F$, o $\emptyset \notin F$, tai $X \neq \emptyset$;

4) jei $I = \emptyset$, tai $\bigcap F_i = X$ (žr. (1.25)), todėl $\in F$. Jei I turi tik vieną elementą, tarkime $I = \{1\}$, tai $\bigcap F_i = F_1$, todėl $\in F$. Jei I turi du elementus, tarkime $I = \{1, 2\}$, tai $\bigcap F_i = F_1 \cap F_2$, todėl $\in F$ (žr. (F_{II})). Ketvirtos išvados teisingumą, kai I turi $n > 2$ elementų, įrodysime pilnos indukcijos metodu. Vietoj $\bigcap_{i \in I} F_i$ rašykime

$$\bigcap_{i=1}^n F_i. \text{ Tarkime, kad } \bigcap_{i=1}^n F_i \in F, \text{ jei } F_1, \dots, F_n \text{ priklauso filtrui } F$$

(indukcijos prielaida). Tada $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = F \cap F_{n+1}$; čia $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$. Jei

$F_1, \dots, F_n, F_{n+1}$ priklauso filtrui F , tai $F \cap F_{n+1} \in F$ (dėl (F_{II})), nes $F \in F$ (indukcijos prielaida) ir $F_{n+1} \in F$. ●

* T. y. I turi n elementų; čia $n \geq 0$ – sveikas skaičius.

Svarbus pavyzdys. Tarkime, kad aibė X turi be galo daug elementų. Visų jos baigtinių poaibių papildiniai sudaro filtrą; pažymėkime šį filtrą raide E . Jei $X=N$ (sveikų neneigiamų skaičių aibė), tai čia aprašytasis filtras E yra vadinamas Frešės filtru. (Frešės filtras naudojamas, apibrėžiant sekų ribas, žr. § 4.)

Irodymas, kad E yra filtras. Jei $F \in E$, o $E \supset F$, tai $CE \subset CF$, todėl CE yra baigtinis poaibis (nes CF – baigtinis), t. y. $E \in E$. Vadinasi, aibės X poaibių rinkinys E turi (F_I) savybę. Jei $F_1 \in E$ ir $F_2 \in E$, tai $F_1 \cap F_2 \in E$, nes $C(F_1 \cap F_2) = (CF_1) \cup (CF_2)$ (žr. (1.9)) yra baigtinė aibė, kadangi ir CF_1 , ir CF_2 – baigtinės. Taigi E turi (F_{II}) savybę. E turi ir (F_{III}) savybę, nes, iš begalinės aibės išmetus baigtinį kiekį elementų, lieka netuščias (netgi begalinis) poaibis. ●

Pastaba. 1 apibrėžimas yra ekvivalentiškas tokiam apibrėžimui:

1' apibrėžimas. Filtras aibėje X yra aibės $P(X)$ poaibis F , turįs savybes (F_I) , (F_{III}) ir savybę

(F'_{II}) jei $(F_i)_{i \in I}$ – baigtinė aibės F elementų šeima, tai

$$\bigcap_{i \in I} F_i \in F.$$

Irodymas. $1 \Rightarrow 1'$, žr. 4 išvadą. $1' \Rightarrow 1$, nes iš (F'_{II}) , kai $I = \emptyset$, gauname, kad $X \in F$, t. y. F – netuščia. ●

Kad būtų trumpesnis užrašymas, įvesime šitokius žymėjimus: jei $K \subset P(X)$, tai

$$K' = \left\{ \bigcap_{i \in I} K_i : K_i \in K, I \text{ baigtinė} \right\} \quad (2.1)$$

ir

$$F_K = \{F \in P(X) : \text{egzistuoja } K \in K \text{ toks, kad } K \subset F\}. \quad (2.2)$$

Pasakius žodžiais, K' yra visokiausių galimų baigtinių šeimų $(K_i)_{i \in I}$ ($K_i \in K$) sankirtų $\bigcap_{i \in I} K_i$ aibė. Pavyzdžiui, $X \in K'$, nes tuščios aibių šeimos sankirtas yra visa aibė X (žr. (1.25)), t. y.

$$K' \neq \emptyset. \quad (2.3)$$

Toliau,

$$K \subset K', \quad (2.4)$$

nes bet kuris aibės K elementas K gali būti užrašytas kaip sankirta

$\bigcap_{i \in I} K_i$; čia I – netuščia baigtinė aibė ir $K_i = K$ visiems $i \in I$. Pa-

galiau, jei $(K'_i)_{i \in I}$ – baigtinė aibės K' elementų šeima, tai

$$\bigcap_{i \in I} K'_i \in K'. \quad (2.5)$$

(Kitaip sakant, $(K')' = K'$.) Tikrai, jei $I = \emptyset$, tai $\bigcap K'_i = X \in K'$.

Imkime atvejį $I \neq \emptyset$. Tada $K'_i = \bigcap_{j \in J_i} K_j$, ir dėl (1.27) turime

$$\bigcap_{i \in I} K'_i = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} K_j \right) = \bigcap_{j \in J} K_j; \text{ čia } J = \bigcup_{i \in I} J_i \text{ – baigtinė aibė,}$$

nes I ir J_i – baigtinės.

Aišku, kad

$$K \subset F_K. \quad (2.6)$$

Be to,

$$\text{jei } K \subset K_1 \subset F_K, \text{ tai } F_{K_1} = F_K. \quad (2.7)$$

Iš tikrųjų, jei $F \in F_K$, tai $F \in F_{K_1}$, nes egzistuoja $K \in K \subset K_1$, $K \subset F$. Atvirkščiai, imkime $F_1 \in F_{K_1}$. Egzistuoja $K_1 \in K_1$, $K_1 \subset F_1$. Kadangi $K_1 \in F_K$, tai atsiras $K \in K$, $K \subset K_1$. Reiškia, $K \subset F_1$ ir $F_1 \in F_K$.

Tarkime, kad $G \subset P(X)$. Galima, kaip (2.1) formulėje, nagrinėti aibės X poaibių rinkinį G' .

1 teiginys. Kad aibėje X egzistuotų filtras F , kurio sietelių tarpe būtų visi aibės G elementai (t. y. $G \subset F$), būtina ir pakanka, kad G turėtų savybę

$$\emptyset \notin G',$$

t. y.

$$(FG) \bigcap_{i \in I} G_i \neq \emptyset, \text{ jei } I \text{ – baigtinė, o } G_i \in G.$$

Įrodymas (paaiškinimą žr. žemiau, smulkiu šriftu).

$(\Rightarrow) (F_{II})$ ir $(F_{III}) \Rightarrow (FG)$, žr. 4 išvadą.

$(\Leftarrow)$ Parodysimė, kad jei galioja (FG) , tai $F_{G'}$ yra filtras. Kadangi $F_{G'} \supset G'$ (žr. (2.6)), o $G' \supset G$ (žr. (2.4)), tai tuo teiginys bus įrodytas. $F_{G'} \neq \emptyset$, nes $G' \neq \emptyset$ (žr. (2.3)). Lieka patikrinti, ar $F_{G'}$ turi savybes (F_I) , (F_{II}) , (F_{III}) . Jei $F \subset E$, $F \in F_{G'}$ ir $G' \subset F$ ($G' \in G'$), tai $G' \subset E$, todėl $E \in F_{G'}$, t. y. $F_{G'}$ turi (F_I) savybę. Jei $F_1, F_2 \in F_{G'}$ ir $G'_1 \subset F_1$, $G'_2 \subset F_2$ ($G'_1, G'_2 \in G'$), tai $F_1 \cap F_2 \supset G'_1 \cap G'_2$, todėl $F_1 \cap F_2 \in F_{G'}$, nes $G'_1 \cap G'_2 \in G'$ (žr. (2.5)). Taigi $F_{G'}$ turi savybę (F_{II}) . Pagaliau, $\emptyset \notin F_{G'}$, nes dėl $(FG) \emptyset \notin G'$. ●

Paaikškinimas. 1 teiginys turi tokią formą: „Tam, kad būtų S , būtina ir pakanka, kad būtų T “. Kitaip sakant, šis teiginys gali būti šitaip užrašytas: „ $S \Leftrightarrow T$ “. Todėl įrodyme pavartoti simboliai $(\Rightarrow)$, $(\Leftarrow)$ žymi įrodymo dalis „ $S \Rightarrow T$ “ ir „ $S \Leftarrow T$ “.

Filtro $F_{G'}$ minimalumo savybė: Jei F – filtras aibėje X ir $G \subset F$, tai $F_{G'} \subset F$.

Įrodymas. $G \subset F$, tai ir $G' \subset F$, nes $\bigcap_{I \in I} G_I \in F$, kai $I -$ baigtinė aibė (žr. 4 išvadą). Vadinasi, bet kuris filtro $F_{G'}$ sietelis F aprėpia filtro F sietelį $G' \in G'$; todėl F priklauso ir filtrui F (žr. (F_I)). ●

2 apibrėžimas. $F_{G'}$ vadinamas filtru, generuotu poaibių rinkinio G (turinčio savybę (FG)).

2 pratimas. Jei $X \neq \emptyset$, tai $G = \emptyset$ turi savybę (FG) , ir $G' = F_{G'} = \{X\}$ (t. y. filtras $F_{G'}$ turi tik vieną sietelį X).

3 pratimas. Jei $G = \{U\}$ ($U \neq \emptyset$), tai $F_{G'}$, o sutampa su filtru, aprašytu 1 pratime.

2 teiginys. Tarkime, kad $B \subset P(X)$. Kad F_B būtų filtras, būtina ir pakanka, kad B turėtų savybes

(B_I) jei B_1 ir B_2 priklauso rinkiniui B , tai egzistuoja $B \in B$ toks, kad $B \subset B_1 \cap B_2$;

(B_{II}) $B \neq \emptyset$ ir $\emptyset \notin B$.

3 apibrėžimas. Aibės X poaibių rinkinys B , turįs savybes (B_I) , (B_{II}) , yra vadinamas filtro baze (būtent, filtro F_B).

2 teiginio įrodymas.

$(\Rightarrow) B \subset F_B$, todėl, pirma, $\emptyset \notin B$ ir, antra, $(F_B) \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in F_B$, t. y. egzistuoja $B \in B$ toks, kad $B \subset B_1 \cap B_2$. Toliau, kadangi F_B – filtras, tai $F_B \neq \emptyset$, tarkime $F \in F_B$. Todėl egzistuoja $B \in B (B \subset F)$, t. y. $B \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Naudodami (B_I) ir (B_{II}) , parodysime, kad

$$B' \subset F_B. \quad (*)$$

Tada, pritaikę (2.7) pareinamybėms $B \subset B' \subset F_B$, turėsime, kad $F_B = F_{B'}$, t. y. kad

$$F_B \text{ yra filtras, generuotas poaibių rinkinio } B. \quad (2.8)$$

Imkimės įrodinėti (*). Jei $I = \emptyset$, tai $\bigcap_{i \in I} B_i = X \in F_B$, nes iš (B_{II}) turime, kad egzistuoja $B \in B$, $B \neq \emptyset$, $B \subset X$. Kai I – baigtinė netuščia, parodysime, kad aibė $\bigcap_{i \in I} B_i (B_i \in B)$ aprėpia kažkurį

$B \in B$, vadinasi, $B' \subset F_B$. Jei $I = \{1\}$, tai $\bigcap_{i \in I} B_i = B_1 \in B$. Tarkime, kad kai $I = \{1, 2, \dots, n\} (n \geq 1)$, tai egzistuoja $B \in B$, $B \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$ (indukcijos prielaida). Tada $\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i = C \cap B_{n+1}$; čia

$C = \bigcap_{i=1}^n B_i$. Sakėme, kad $B \subset C$. Todėl $B \cap B_{n+1} \subset C \cap B_{n+1}$, ir dėl

(B_I) egzistuoja $\tilde{B} \in B$ toks, kad $\tilde{B} \subset B \cap B_{n+1} \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} B_i$. Indukcija pravesta. ●

Iš (2.7) ir (2.8) gauname išvadą:

Jei B yra filtro F bazė ir $B \subset B_1 \subset F$, tai ir B_1 yra filtro F bazė.

Pavyzdžiui, ir pats F yra filtro F bazė (bet svarbu yra kuo mažesnės bazės).

3 teiginys. *Jei $f: X \rightarrow Y$ – funkcija ir $B \subset P(X)$ – filtro bazė, tai*

$$f(B) = \{f(B) \in P(Y) : B \in B\} \quad (2.9)$$

yra filtro (aibėje Y) bazė.

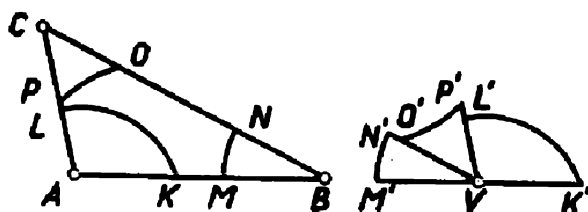
Įrodymas. Reikia patikrinti, kad $f(B)$ turi savybes (B_I) , (B_{II}) . Kadangi $B \subset B_1 \cap B_2$ (žr. rinkinio B savybę (B_I)), tai $f(B) \subset f(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$ (žr. (1.35)). Vadinasi, $f(B)$ turi (B_I) savybę. $f(B) \neq \emptyset$, nes $B \neq \emptyset$; $\emptyset \notin f(B)$, nes $\emptyset \notin B$. Taigi $f(B)$ turi ir (B_{II}) savybę. ●

Pastaba. Net $f(F)$ (kur F – filtras aibėje X), bendrai imant, yra tik filtro bazė. Tiksliau žr. ketvirtą pratimą.

4 pratimas. Tarkime, kad $f: X \rightarrow Y$ – funkcija. Jei F – filtras aibėje X , tai $f(F)$ bus filtras tada ir tik tada, kai $f(X) = Y$.

§ 3. TOPOLOGINĖS ERDVĖS

Žodis „erdvė“ sukelia mus supančios erdvės vaizdinį. Šitoje materialioje erdvėje skrieja žvaigždės, planetos, sklinda šviesa, gravituoja kūnai. Kiekvienas, mokėsis geometrijos, yra pastebėjęs, kad geometrijoje tyrinėjama lyg ir toji materialioji erdvė (pavyzdžiui, pridėję prie akies, tikriname liniuotės, lentos tiesumą), tačiau tuo pat metu ir ne ši erdvė, o kažkokia ideali (tašką juk vaizduojamės kaip idealiai smailios adatos smaigaliu padarytą žymę, liniją – be pločio, nubrėžtą idealiai smailiu pieštuku ir t. t.). Štai kaip čia yra. Matavimai, stebėjimai ir eksperimentai, daugybę kartų atlikti materialioje erdvėje, išryškino eilę esminių tos erdvės savybių. Pavyzdžiui, kokį trikampį beišpiausime (iš lentos, iš faneros, skardos ar kartono), nupiausę jo tris kampus ir sudėjus juos prie bendros viršūnės, gausime tiesią liniją (4 brėž. „ $M'VK'$ “).

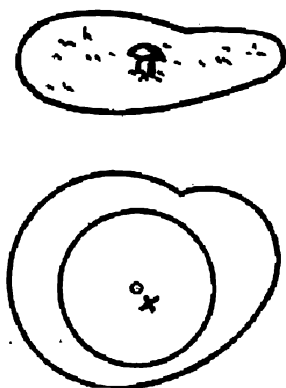


4 brėž.

Matuodami įvairiausių trikampių kampus ir skaičiuodami jų sumą, pastebime dėsni: „trikampio kampų suma yra ištiestinis kampas“. Nors gyvenimo praktikoje atliekame tik materialių daiktų matavimus, bet mūsų negali patenkinti vien empiriškai atrastos savybės. Antai, jei matuosime apskritimo, kurio spindulys 1 m, ilgį, gausime kiek daugiau negu 6 m 28 cm. Ir jokie matavimai nebus pakankamas pagrindas manyti, kad apskritimo ir jo spindulio ilgių santykis yra 2π . Todėl siekiama sukonstruoti abstraktų, matematinį materialiosios erdvės modelį. Toks modelis pirmąkart išsamiai aprašytas Euklido „Elementuose“. Vietoj materialių taškų, linijų ir t. t. imami idealūs („taškas yra tai, kas neturi dalių“, „linija yra ilgis be pločio“, – kaip sakė Euklidas), kai kurie empiriškai gauti dėsniai priimami už aksiomas, o kitos

savybės jau išvedamos logiškai protaujant. Deja, Euklido duotieji taško ir linijos „apibrėžimai“, kuriuos čia paminėjome (Euklido „Elementuose“ yra ir daugiau tokio tipo „apibrėžimų“), loginiu požiūriu neturi jokios vertės, ir jais Euklidas niekur nesiremia. Taškai, tiesės ir dar viena-kita sąvoka čia yra pirminės (t. y. neapibrėžiamos). Apie jas žinoma tik tiek, kad jos tenkina eilę Euklido aksiomų (žr. [5]).

Po Euklido daugiau negu du tūkstantmečius giliai tikėta, kad negalimas kitoks, negu Euklido, erdvės supratimas. Ir tik praėjo šimtmečio pirmoje pusėje Lobačevskis, Bojajis ir Gausas išvystė dar vieną aksiomatinę erdvės teoriją – Lobačevskio geometriją. Šis atradimas buvo lūžis pažiūrose į matematinę erdvės sąvoką. Kleinas pagaliau suformulavo: erdvė yra aibė X kartu su fiksuota šios aibės transformacijų grupe Γ^* , o erdvės X geometriją sudaro visos tos savybės, kurios nekinta, atliekant transformacijas, priklausančias grupei Γ . Pavyzdžiui, Euklido plokštuma yra aibė $\mathbb{R}^2$, kai jos transformacijų grupė Γ yra visų perkėlimų (žr. [1]) aibė. Kleino duotas apibrėžimas tinka ir topologinei erdvei nusakyti: topologinė erdvė yra aibė X , kai transformacijų grupė Γ yra aibė visų tų bijekcijų $f: X \rightarrow X$, kad f ir f^{-1} kiekvieną atvirą aibę pveda į atvirą aibę arba, kas yra tas pats, bet kurio taško $x \in X$ kiekvieną aplinką pveda į taško x vaizdo aplinką (atviros aibės ir aplinkos sąvoką žr. 4 apibrėžime). Tokios bijekcijos turi specialų pavadinimą: homeomorfizmai. Visos tos savybės, kurios nekinta, atliekant homeomorfizmus, sudaro erdvės X topologiją (t. y. topologinės erdvės X geometriją, – kalbant Kleino kalba).



5 brėž.

„Aplinka“ kaip topologinė sąvoka yra kilusi iš įprasto aplinkos supratimo. Pavyzdžiui, grybautojas, radęs baravyką, atidžiai apžiūri ir aplinką – gal dar baravykų ras. Tuo būdu, plokštumos taško x aplinka laikytina tokia plokštumos taškų aibe, kurioje guli skrituliukas (kad ir nedidelio spindulio) su centru taške x (5 brėž.). Atvira aibė – tai aibė, kuri yra

* T. y. Γ yra visų funkcijų $X \rightarrow X$ aibės X^X netuščias poaibis, turis savybės: 1) jei $f \in \Gamma$, tai f yra bijekcija ir $f^{-1} \in \Gamma$; 2) jei f ir $g \in \Gamma$, tai jų kompozicija $g \circ f \in \Gamma$.

kiekvieno jai priklausančio taško aplinka. Pavyzdžiui, plokštumoje skritulio vidiniai taškai (t. y. skritulio taškai, nepriklausantieji pačiam apskritimui) sudaro atvirą aibę. Vaizdžiai kalbant, aibės kontūras (skritulio atveju – apskritimas) – tai lyg „tvora“; tvorą nuardžius, lieka atvira aibė.

Ir dar pora paaiškinimų. Šio paragrafo pirmajame apibrėžime surašytos aksiomos, kurias tenkina taškų aplinkos, o antrajame – atvirųjų aibių aksiomos. Jei X – topologinė erdvė, tai T -funkcija būtų funkcija, kuri kiekvienam erdvės X taškui x priskiria to taško visų aplinkų aibę, žymimą $V(x)$, o T -sistema – erdvės X visų atvirųjų aibių aibė. (Sąvokose „ T -funkcija“ ir „ T -sistema“ raidė T – žodžio „topologija“ pirmoji raidė.)

Primename, kad simboliu $P(X)$ žymima duotos aibės X visų poaibių aibė.

1 apibrėžimas. *T -funkcija aibėje X – tai funkcija $X \ni x \mapsto V(x) \subset P(X)$ tokia, kad, kiekvienam $x \in X$, aibės X poaibių rinkinys $V(x)$ yra filtras ir, be to, yra patenkintos sekančios sąlygos:*

(V_I) *jei $V \in V(x)$, tai $x \in V$;*

(V_{II}) *jei $V \in V(x)$, tai egzistuoja $W \in V(x)$ tokia, kad, kokią bepaimtume $y \in W$, aibė $V \in V(y)$.*

Pastaba. Kadangi $V(x)$ – filtras, tai

$$X \in V(x), \quad (3.1)$$

kokį bepaimtume $x \in X$.

2 apibrėžimas. *Aibės X poaibių T -sistema – tai aibės $P(X)$ poaibis O , turįs savybes*

(O_I) *jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – kokia nors sistemos O elementų šeima, tai $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in O$;*

(O_{II}) *jei $(U_i)_{i \in I}$ – baigtinė sistemos O elementų šeima, tai $\bigcap_{i \in I} U_i \in O$.*

Pastaba. Kai $A = \emptyset$, tai $\bigcup U_\alpha = \emptyset$; kai $I = \emptyset$, tai $\bigcap U_i = X$ (žr. (1.25)). Vadinasi,

$$\emptyset \in O \text{ ir } X \in O. \quad (3.2)$$

1 teiginys. *Jei aibėje X duota T -funkcija V , tai poaibių sistema*

$$O[V] = \{ U \in P(X) : \text{jei } x \in U, \text{ tai } U \in V(x) \}$$

yra T -sistema.

Pastaba. Savybę

$$„\text{jei } x \in U, \text{ tai } U \in V(x)“ \quad (3.3)$$

suformulavę negatyviai

$$„\text{nėra tokio } x \in U, \text{ kad } U \notin V(x)“,$$

matome, kad

$$\emptyset \in O[V]. \quad (3.4)$$

Be to, (3.1) reiškia, kad X turi (3.3) savybę, t. y.

$$X \in O[V]. \quad (3.5)$$

1 teiginio įrodymas*. Reikia įrodyti, kad aibės X poaibių sistema $O[V]$ turi savybes (O_I) ir (O_{II}) .

Pirmiausia – (O_I) . Jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – tuščia aibės $O[V]$ elementų šeima (t. y. $A = \emptyset$), tai $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset \in O[V]$, žr. (3.4). Dabar tar-

kime, kad $A \neq \emptyset$. Tada, kiekvienam $\alpha \in A$, aibės X poaibis U_α turi (3.3) savybę. Reikia iširti, ar $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ turi (3.3) savybę. Jei

$x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, tai atsiras toks $\alpha_0 \in A$, kad $x \in U_{\alpha_0}$. Kadangi U_{α_0} turi

(3.3) savybę, tai $U_{\alpha_0} \in V(x)$. Bet $U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, o $V(x)$ – filtras,

todėl $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in V(x)$ (žr. filtro aksiomą (F_I)). Taigi sistema $O[V]$

turi (O_I) savybę.

O savybę (O_{II}) ? Jei $(U_i)_{i \in I}$ – tuščia šeima (t. y. $I = \emptyset$), tai $\bigcap U_i = X \in O[V]$ (žr. (3.5)). Jei $I \neq \emptyset$, tai, kokį bepaimtumė $i \in I$, aibės X poaibis U_i turi (3.3) savybę. Imkime $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$.

Tada, kiekvienam $i \in I$, yra $x \in U_i$ ir $U_i \in V(x)$. Bet $V(x)$ – filtras o I – baigtinė. Todėl $\bigcap_{i \in I} U_i \in V(x)$ (žr. 4 išvadą iš filtro aksi-

omų, 24 p.), t. y. $O[V]$ turi ir (O_{II}) savybę. ●

* Pirmą kartą skaitant, galima šį įrodymą praleisti.

2 teiginys. Jei O yra aibės X poaibių T -sistema, tai formule

$$x \mapsto V[O](x) = \{V \in P(X): \text{egzistuoja } U \in O \text{ tokia, kad } x \in U \subset V\}$$

yra apibrėžiama T -funkcija.

Pastaba. Jei $U \in O$ ir $x \in U$, tai $x \in U \subset U$, t. y.

$$U \in V[O](x). \quad (3.6)$$

2 teiginio įrodymas.* Pradžioje patikrinsime, ar $V[O](x)$ yra filtras. Kadangi $X \in O$ (žr. (3.2)), tai $X \in V[O](x)$ (žr. (3.6)), koks bebūtų $x \in X$. Todėl $V[O](x)$ yra aibės $P(X)$ netuščias poaibis. Tarkime, kad $V \in V[O](x)$ ir $V \subset E$. Egzistuoja $U \in O$ tokia, kad $x \in U \subset V$. Tada $x \in U \subset E$, nes $U \subset V \subset E$. Vadinasi, $E \in V[O](x)$, t. y. $V[O](x)$ turi (F_I) savybę (žr. filtro apibrėžimą, 23 p.). Jei V_1 ir $V_2 \in V[O](x)$, tai egzistuoja U_1 ir $U_2 \in O$ tokios, kad $x \in U_1 \subset V_1$ ir $x \in U_2 \subset V_2$. Tada $x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$. Todėl $V_1 \cap V_2 \in V[O](x)$, nes $U_1 \cap U_2 \in O$ (žr. (O_{II})). Taigi $V[O](x)$ turi (F_{II}) savybę. Be to, kokią bepaimtume $V \in V[O](x)$,

$$x \in V \quad (3.7)$$

(nes egzistuoja $U \in O$ tokia, kad $x \in U \subset V$), t. y. $V \neq \emptyset$, arba $\emptyset \notin V[O](x)$. Tuo būdu, $V[O](x)$ yra filtras. Tuo pat metu (3.7) priklausomybė reiškia, kad filtras $V[O](x)$ turi (V_I) savybę, ir belieka patikrinti (V_{II}) savybės galiojimą. Jei $V \in V[O](x)$, tai už ieškomą W galima imti bet kurią $U \in O$, turinčią savybės $x \in U \subset V$. Tikrai, $U \in V[O](x)$ (žr. (3.6)), ir jei $y \in U$, tai $y \in U \subset V$, t. y. $V \in V[O](y)$. ●

Tarkime, kad O – kažkokia aibės X poaibių T -sistema. Paėmę T -funkciją $V = V[O]$, galime nagrinėti T -sistemą $O[V[O]]$.

Pradėję nuo T -funkcijos V aibėje X , gauname poaibių T -sistemą $O = O[V]$ ir galime nagrinėti T -funkciją $V[O[V]]$. Pasirodo, yra teisinga šitokia teorema.

1 teorema. $O = O[V[O]]$, $V = V[O[V]]$. Kitais žodžiais, $O = O[V] \Leftrightarrow V = V[O]$.

* Pirmą kartą skaitant, šį įrodymą taip pat galima praleisti.

[Įrodymas.* Patikrinkime lygybę $O = O[V[O]]$. Jei $U \in O$, tai $U \in V[O](x)$ kiekvienam $x \in U$ (žr. (3.6)), t. y. $U \in O[V[O]]$. Vadinasi,

$$O \subset O[V[O]]. \quad (*)$$

Atvirkščiai, jei $U' \in O[V]$, tai $U' \in V(x)$ kiekvienam $x \in U'$. Kadangi $V = V[O]$, tai, bet kuriam $x \in U'$, egzistuoja $U_x \in O$ tokia, kad $x \in U_x \subset U'$. Todėl $U' = \bigcup_{x \in U'} U_x$ ir, dėl (O_1) , $U' \in O$. Taigi

$$O[V[O]] \subset O. \quad (**)$$

Priklausomybės (*), (**) rodo, kad $O = O[V[O]]$.

Dabar įrodysime, kad $V = V[O[V]]$, t. y. kad bet kuriam $x \in X$ yra $V(x) = V[O[V]](x)$. Imkime $V \in V(x)$. Apibrėžkime aibę U formule $U = \{y \in V : V \in V(y)\}$. Tada $x \in U$ (dėl (V_D)), ir U turi (3.3) savybę (kuri reiškia, kad $U \in O[V]$). Tikrai, jei $x_0 \in U$, tai dėl (V_D) egzistuoja $W \in V(x_0)$ tokia, kad, kiekvienam $y \in W$, $V \in V(y)$. Tai rodo, kad $W \subset U$, o kadangi W priklauso filtrui $V(x_0)$, tai $U \in V(x_0)$ (žr. (F_1)). Taigi $U \in O[V]$, todėl $V \in V[O[V]](x)$, nes $x \in U \subset V$. Gavome, kad

$$V(x) \subset V[O[V]](x). \quad (**)$$

Atvirkščiai, imkime $V' \in V[O[V]](x)$. Egzistuoja $U \in O[V]$ (t. y. kiekvienam $x \in U$, $U \in V(x)$) tokia, kad $x \in U \subset V'$. Kadangi $U \in V(x)$, tai iš filtro aksiomos (F_1) gauname, kad $V' \in V(x)$. Tuo būdu,

$$V[O[V]](x) \subset V(x). \quad (**')$$

Iš (**) ir (**') darome išvadą, kad $V(x) = V[O[V]](x)$. ●

3 apibrėžimas. Apibrėžti aibėje X topologiją – reiškia nurodyti šioje aibėje T -funkciją V . Dėl 1 teoremos tai yra tas pats, kas ir nusakyti aibės X poaibių T -sistemą $O = O[V]$. Topologinė erdvė yra aibė su apibrėžta joje topologija.

* Šį įrodymą pradedantysis taip pat gali praleisti.

4 apibrėžimas. Tarkime, kad X – topologinė erdvė, kurioje topologija apibrėžta su T -funkcijos V (arba T -sistemos $O = O[V]$) pagalba. Aibės, priklausančios sistemai O , vadinamos atviromis aibėmis. Aibės, priklausančios filtrui $V(x)$ (kur x – koks nors erdvės X elementas), vadinamos taško x aplinkomis. Bet kokia filtro $V(x)$ bazė dar vadinama taško x fundamentalia aplinkų sistema.

Pavyzdžiui, taško x atvirosios aplinkos sudaro fundamentalią aplinkų sistemą.

Iš 1 ir 2 teiginių matome, kad topologinėje erdvėje atvira aibė – tai tokia aibė, kuri yra kiekvieno savo taško aplinka, o taško x aplinka – tai aibė V , aprėpianti atvirą aibę U tokią, kad $x \in U$.

Aksiomos (O_I) , (O_{II}) (jos dar vadinamos atvirųjų aibių aksiomomis) gali būti performuluotos šitaip:

(O_I) Bet kokios atvirų aibių šeimos junginys yra atvira aibė.

(O_{II}) Baigtinės atvirų aibių šeimos sankirta yra atvira aibė.

Todėl (žr. (3.2)) tuščiasis poaibis yra atvira aibė (kaip tuščios atvirų aibių šeimos junginys) ir visa erdvė X yra atvira aibė (kaip tuščios atvirų aibių šeimos sankirta).

Topologijų pavyzdžiai.

1. Bet kurios aibės X visų poaibių aibė $P(X)$ yra T -sistema (patikrinkite). Remiantis šia sistema, apibrėžta topologija vadinama diskretiškąja, o X su šia topologija – diskretiškąja topologine erdve.

2. Aibės X poaibių sistema $\{\emptyset, X\}$ yra T -sistema (patikrinkite). Šia sistema apibrėžta topologija aibėje X vadinama silpniausiaja topologija. (Ši topologija vadinama silpniausiaja todėl, kad jos atvirų aibių sąrašas yra mažiausias galimas – tik $\emptyset$ ir X : kokią bepaimtumė T -sistemą O aibėje X , visada $\{\emptyset, X\} \subset O$. Ta prasme diskretiškoji topologija dar vadinama stipriausiaja topologija, nes jos atvirų aibių sąrašas yra didžiausias galimas: bet kuri T -sistema O aibėje X yra T -sistemos $P(X)$ poaibis.)

3. Poerdvis. Tarkime, kad X – topologinė erdvė, kurios topologija apibrėžta su T -sistemos O pagalba. Jei $X' \subset X$, tai aibės X' poaibių rinkinys $O' = \{U \cap X' : U \in O\}$ yra T -sistema

aibėje X' (patikrinkite); jei aibėje X' topologija nusakyta su šios T -sistemos O' pagalba, tai sakoma, kad X' yra topologinės erdvės X poerdvis arba kad poaibio X' topologija yra indukuota erdvės X topologijos.

1 pratimas. Jei X' – topologinės erdvės X poerdvis, tai taško $x \in X'$ aplinkų filtrą erdvėje X' yra $V'(x) = \{V \cap X' : V \in \mathcal{V}(x)\}$; čia $\mathcal{V}(x)$ – taško x aplinkų filtrą visoje erdvėje X .

4. Poaibių rinkinio generuota T -sistema. Tarkime, kad $K \subset P(X)$. Sukonstruosime mažiausią T -sistemą, kurios poaibių būtų K . Kadangi kiekvienas rinkinio K elementas priklausys šitai T -sistemai, tai dėl (O_Π) ir K' (žr. (2.1)) bus tos T -sistemos poaibis. Todėl ieškoma mažiausia T -sistema, kurios poaibių yra K , yra tokia:

$$O_{K'} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} K'_\alpha : K'_\alpha \in K', A - \text{bet kokia aibė} \right\}, \quad (3.8)$$

t. y. $O_{K'}$ yra aibės K' elementų visokiausių galimų šeimų junginių aibė.

Tikrai, kadangi K' yra ieškomos T -sistemos poaibis, tai (3.8) formule apibrėžtoji aibės X poaibių aibė $O_{K'}$ dėl (O_I) taip pat bus tos T -sistemos poaibis. Bet, pasirodo, pati $O_{K'}$ jau yra T -sistema. Patikrinkime tai. Jei $(U_\beta)_{\beta \in B}$ – kokia nors aibės $O_{K'}$ elementų šeima, t. y. $U_\beta = \bigcup_{\alpha \in A_\beta} K'_\alpha$, kur $K'_\alpha \in K'$, tai $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta = \bigcup_{\beta \in B} \left(\bigcup_{\alpha \in A_\beta} K'_\alpha \right) = \bigcup \left\{ K'_\alpha : \alpha \in \bigcup_{\beta \in B} A_\beta \right\}$ (žr. (1.26)), t. y. $\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \in O_{K'}$ ir $O_{K'}$ turi (O_I) savybę. Jei $(U_i)_{i \in I}$ – baigtinė aibės $O_{K'}$ elementų šeima ir $U_i = \bigcup_{\alpha \in A_i} K'_\alpha$, tai

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} U_i &= \bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{\alpha \in A_i} K'_\alpha \right) = \\ &= \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} (K'_{\alpha_1} \cap \dots \cap K'_{\alpha_n}), \end{aligned}$$

jei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ (žr. (1.31)). Bet dėl (2.5) $K'_{\alpha_1} \cap \dots \cap K'_{\alpha_n} \in K'$, todėl $\bigcap_{i \in I} U_i \in O_{K'}$, t. y. $O_{K'}$ turi ir (O_{Π}) savybę. ●

5 apibrėžimas. Sakoma, kad T -sistema $O_{K'}$ (žr. (3.8)) yra generuota poaibių rinkinio K . Jei O – kokia nors T -sistema, o $L \subset O$ turi savybę

$$O = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} L_{\alpha} : L_{\alpha} \in L, A - \text{bet kokia aibė} \right\},$$

tai L vadinama T -sistemos O baze arba topologijos, kurią apibrėžia ši T -sistema, atvirąja baze.

Pavyzdžiui, K' yra T -sistemos $O_{K'}$ bazė.

2 pratimas. Tarkime, kad aibė $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Išvardinkite visus tuos aibės $P(X)$ poaibius, kurie yra T -sistemos. (Kiek yra tokių T -sistemų, tiek yra skirtingų topologijų aibėje X).

5. Topologinių erdvių sandauga. Jei X, X' – topologinės erdvės, kuriose visų atvirų aibių T -sistemos yra O, O' (atitinkamai), tai aibės $X \times X'$ poaibių rinkinys

$$\left\{ \bigcup_{\alpha \in A} (U_{\alpha} \times V_{\alpha}) : U_{\alpha} \in O, V_{\alpha} \in O', A - \text{bet kokia aibė} \right\} \quad (3.9)$$

yra T -sistema. Aibė $X \times X'$ su šios T -sistemos apibrėžta topologija yra vadinama topologinių erdvių X ir X' sandauga. Kitaip sakant aibės, $U \times V$, kur $U \in O, V \in O'$, sudaro erdvės $X \times X'$ topologijos atvirąją bazę.

Patikrinsime, ar (3.9) rinkinys yra T -sistema. Jei $(W_{\beta})_{\beta \in B}$ – (3.9) rinkinio elementų šeima, t. y. $W_{\beta} = \bigcup \{U_{\alpha} \times V_{\alpha} : \alpha \in A_{\beta}\}$, tai $\bigcup_{\beta \in B} W_{\beta} = \bigcup \left\{ U_{\alpha} \times V_{\alpha} : \alpha \in \bigcup_{\beta \in B} A_{\beta} \right\}$, t. y. (3.9) rinkinys turi (O_I) savybę. Jei $(W_i)_{i \in I}$ – baigtinė rinkinio (3.9) elementų šeima ir

$$W_i = \bigcup_{\alpha \in A_i} (U_{\alpha} \times V_{\alpha}), \text{ tai}$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} W_i &= \bigcup_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} (U_{\alpha_1} \times V_{\alpha_1}) \cap \dots \cap (U_{\alpha_n} \times V_{\alpha_n}) = \\ &= \bigcup_{(\alpha, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n} (U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}) \times (V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_n}) \end{aligned}$$

(žr. (1.31) ir (1.32)), t. y. ir (O_{Π}) galioja, nes

$$U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \in O, \quad V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_n} \in O'.$$

Analogiškai, jei $X_1, \dots, X_n$ – topologinės erdvės, tai aibės $U_1 \times \dots \times U_n$ (čia U_i – bet kokia atvira aibė erdvėje X_i) sudaro topologinės erdvės $X_1 \times \dots \times X_n$ atvirą bazę. Begalinės topologinių erdvių šeimos $(X_j)_{j \in J}$ sandaugos $\prod_{j \in J} X_j$ atvirą bazę sudaro

aibės $\prod_{j \in J} U_j$; čia U_j – atvira aibė erdvėje X_j ir $U_j \neq X_j$ nedaugiau

kaip baigtiniam kiekiui j reikšmių.

6. Aprašysime dar vieną labai svarbų būdą topologijoms gauti. Dabartiniame vidurinės mokyklos VI klasės geometrijos vadovėlyje [1] parašyta, kad taškas, tiesė ir plokštuma laikomi pirminėmis (t. y. neapibrėžiamomis) sąvokomis, ir yra pateiktos šitokios aksiomos apie atstumus:

(D_I) Jei A ir B – taškai, tai atstumas nuo A iki B yra neneigiamas skaičius, žymimas $|AB|$; $|AB|=0$ tada ir tik tada, kai taškas A sutampa su tašku B (t. y. kai $A=B$).

(D_{II}) $|AB|=|BA|$, t. y. atstumas nuo A iki B yra lygus atstumui nuo B iki A , kokie bebūtų taškai A, B .

(D_{III}) Jei A, B, C – taškai, tai $|AB|+|BC| \geq |AC|$.

Savybė (D_{II}) vadinama atstumo simetriškumo savybe*, o (D_{III}) – trikampio nelygybe.

6 apibrėžimas. Aibė X , tarp kurios taškų $A, B, \dots$ yra nusakytas atstumas (tarkime žymimas $|AB|$), turintis savybes (D_I), (D_{II}), (D_{III}), yra vadinama metrine erdve.

Taigi visos tos savybės, kurios gaunamos vien iš aksiomų (D_I), (D_{II}), (D_{III}), yra bet kurios metrinės erdvės savybės, o ne vien plokštumos geometrijos privilegija. Tačiau nagrinėjant metrinių erdvių konstrukcijas, visada nandinga pažiūrėti, kaip jos atrodo plokštumoje, kadangi plokštuma yra pats vaizdžiausias metrinės erdvės pavyzdys.

*Dėl (D_{II}) skaičius $|AB|$ dar vadinamas atstumu tarp taškų A ir B .

Jei r – teigiamas realusis skaičius, o A – metrinės erdvės X taškas, tai aibė

$$S(A, r) = \{B \in X : |AB| < r\} \quad (3.10)$$

vadinama (atviru) rutuliu (kurio centras A , o spindulys r) Plokštumos atveju $S(A, r)$ yra skritulys.

Tarkime, kad X – metrinė erdvė ir $A \in X$.

3 teiginys. Rutuliai $S\left(A, \frac{1}{n}\right) (n=1, 2, \dots)$ sudaro filtro bazę, t. y. galioja § 2 aksiomos (B_I) , (B_{II}) ; pažymėkime tą filtrą $V(A)$. Tada $X \ni A \mapsto V(A)$ yra T -funkcija.

Tuo būdu (netuščioje) aibėje X įvedama topologija; ši topologija vadinama metrinės erdvės topologija.

3 teiginio įrodymas. Jei $n_1 \leq n_2$, tai $S\left(A, \frac{1}{n_1}\right) \cap S\left(A, \frac{1}{n_2}\right) = S\left(A, \frac{1}{n_2}\right)$, t. y. (B_I) galioja. $S\left(A, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$, nes $A \in S\left(A, \frac{1}{n}\right)$, t. y. ir (B_{II}) galioja. Jei $V \in V(A)$, tai, kažkuriam n , $S\left(A, \frac{1}{n}\right) \subset V$ ir kadangi $A \in S\left(A, \frac{1}{n}\right)$, tai $A \in V$, t. y. filtras $V(A)$ turi (V_I) savybę. Tikrinant, ar galioja (V_{II}) , už ieškomą W galima imti bet kurį iš tų $S\left(A, \frac{1}{n}\right)$, kurie guli aibėje V . Iš tikrųjų, tarkime, kad $S\left(A, \frac{1}{n}\right) \subset V$ ir $B \in S\left(A, \frac{1}{n}\right)$. (Kaip tai atrodo plokštumoje?) Kadangi $\frac{1}{n} - |AB| > 0$, tai egzistuoja sveikas teigiamas k toks, kad $\frac{1}{k} < \frac{1}{n} - |AB|$. Dėl trikampio nelygybės (D_{III}) , jei $|BC| < \frac{1}{k}$, tai $|AC| \leq |AB| + |BC| < |AB| + \frac{1}{k} < \frac{1}{n}$, t. y. $S\left(B, \frac{1}{k}\right) \subset S\left(A, \frac{1}{n}\right)$, vadinasi, kiekvienam $B \in S\left(A, \frac{1}{n}\right)$, $V \in V(B)$. ●

3 pratimas. (3.10) rutulys yra atvira aibė. Bet kokią atvirą aibę metrinėje erdvėje visada galima vaizduotis kaip kažkokių atvirų rutulių junginį (t. y. atvirieji rutuliai sudaro metrinės erdvės atvirąją bazę, žr. šio paragrafo penktąjį apibrėžimą).

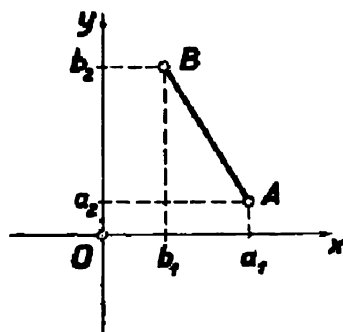
3 teiginys patikslina (ir apibendrina bet kokioms metrinėms erdvėms) šio paragrafo pradžios pastabas, aiškinant aplinkos ir atviros aibės sąvokas.

Įvedus plokštumoje koordinates, t. y. žiūrint į plokštumą kaip į $\mathbb{R}^2$ (plg. § 1), atstumas tarp taškų $A=(a_1, a_2)$ ir $B=(b_1, b_2)$ yra

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

(žr. 6 brėžinį).

Realųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ taip pat yra metrinė erdvė, jei atstumu nuo $x \in \mathbb{R}$ iki $y \in \mathbb{R}$ laikysime skaičių $|y - x|$. (Paliekame skaitytojui patikrinti, kad toks atstumas turi savybes (D_I) , (D_{II}) , (D_{III}) .) Realųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ su šios metrinės erdvės topologija yra vadinama realiąja tiese, arba tiesiog tiese. Kodėl „tiesė“? – Todėl, kad realiuosius skaičius galima geometriškai pavaizduoti



6 brėž.



7 brėž.

tiesės taškais. Prisiminsime, kaip tai daroma. Tiesėje paimami du skirtingi taškai, tarkime O ir V (7 brėž.). Tada skaičiui $x \in \mathbb{R}$ priskiriamas tiesės taškas M toks, kad 1) atkarpos OM ilgis būtų $|x|$, atkarpą OV laikant ilgio vienetu, ir 2) M priklausytų spinduliui OV , jei $x > 0$, ir spindulio OV papildiniui, jei $x < 0$. Tuo būdu, gauname bijekciją aibės $\mathbb{R}$ ant tiesės visų taškų aibės; dar sakoma, kad tokiu būdu tiesėje įvedamos koordinatės.

4 pratimas. Realioje tiesėje $\mathbb{R}$ atviras rutulys (3.10), kurio centras $a \in \mathbb{R}$, o spindulys r , yra skaičių intervalas $]a - r, a + r[$. Be to, pritaikykite 3 pratimo rezultatus realiajai tiesei $\mathbb{R}$.

5 pratimas. Plokštumoje yra daug tiesių; imkime vieną iš jų, sakykime, tiesę L . Tiesės L taškų aibė yra visų plokštumos taškų aibės poaibis, todėl plokštumos topologija indukuoja tiesėje L tam tikrą topologiją (žr. 3 pavyzdį). Pasirodo, ši topologija sutampa su topologija, kuri gaunama, įvedus tiesėje L koordinates aukščiau

aprašytu būdu ir į L žiūrint kaip į R . (Posakis „topologijos sutampa“ reiškia, kad abiejose topologijose atvirosios aibės yra tos pačios arba, kas yra tas pats, taškų aplinkos yra tos pačios; kitaip sakant, jei pirmoji topologija apibrėžta T -sistemos O_1 , o antroji – T -sistemos O_2 , tai $O_1 = O_2$.)

Cituodami VI klasės geometrijos vadovėlį, metrinės erdvės taškus žymėjome $A, B, \dots$, o atstumą nuo A iki B – simboliu $|AB|$. Jau iš realiosios tiesės R pavyzdžio matome, kad nėra reikalo suvaržyti save tokiais žymėjimais. Todėl nuo šiol aibės X taškus vėl žymėsime $x, y, \dots$ (nors, kai bus patogų, žymėsime ir kitokiomis raidėmis, gal ir didžiosiomis). Atstumą nuo x iki y paprastai žymėsime $\rho(x, y)$. Toks žymėjimas išryškina tą faktą, kad atstumas nuo x iki y – tai funkcijos $\rho: X \times X \rightarrow R$ reikšmė $\rho(x, y)$; funkcija ρ turi savybes ($D_I - D_{III}$), kurias dabar perrašysime šitaip:

(D_I) Jei $x, y \in X$, tai $\rho(x, y) \geq 0$; be to, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(D_{II}) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, kokie bebūtų $x, y \in X$.

(D_{III}) Jei $x, y, z \in X$, tai $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Funkcija ρ vadinama metrinės erdvės X metrika.

6 pratimas. Bet kurios netuščios aibės X atveju funkcija $\rho: X \times X \rightarrow R$, apibrėžta formule

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \neq y, \\ 0, & \text{jei } x = y, \end{cases}$$

yra metrika. Gautoji topologija yra diskretiškoji (žr. 1 pavyzdį).

7 pratimas. Paminėsime dar dvi svarbias metrikas ρ_1 ir ρ_2 aibėje R^n : jei $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$, tai

$$\rho_1(A, B) = \max\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|\},$$

$$\rho_2(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2|.$$

Apibendrinant bet kokiam $n \geq 1$, aibėje R^n turime tokias metrikas: jei $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$, tai

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2},$$

$$\rho_1(A, B) = \max\{|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|, \dots, |b_n - a_n|\},$$

$$\rho_2(A, B) = |b_1 - a_1| + |b_2 - a_2| + \dots + |b_n - a_n|.$$

Imdami $n = 2$, nupieškite „rutulius“ $S_1(A, r) = \{B \in R^2 : \rho_1(A, B) < r\}$ ir $S_2(A, r) = \{B \in R^2 : \rho_2(A, B) < r\}$.

8 pratimas. Imkime $A \in \mathbb{R}^n$. Naudodami pračio pratimo žymėjimus, parodykite, kad rutulyje $S_1(A, r) = \{B \in \mathbb{R}^n : \rho_1(A, B) < r\}$ guli rutulys $S(A, r) = \{B \in \mathbb{R}^n : |AB| < r\}$, o šiame guli rutulys $S_1\left(A, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) = \left\{B \in \mathbb{R}^n : \rho_1(A, B) < \frac{r}{\sqrt{n}}\right\}$. Analogiškai, rutulyje $S_1(A, r)$ guli rutulys $S_2(A, r) = \{B \in \mathbb{R}^n : \rho_2(A, B) < r\}$, o rutulyje $S_2(A, r)$ guli rutulys $S_1\left(A, \frac{r}{n}\right)$.

9 pratimas. (8_ pratimo tęsinys). Pažymėkime $V(A)$ filtrą, kurio bazę sudaro rutuliai $S\left(A, \frac{1}{k}\right) V(A)$ – filtrą, kurio bazė yra, rutuliai $S_1\left(A, \frac{1}{k}\right)$, ir $V_2(A)$ – filtrą, kurio bazė yra rutuliai $S_2\left(A, \frac{1}{k}\right)$ ($k = 1, 2, \dots$). Iš pareinamybių $S_1\left(A, \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset S(A, r) \subset S_1(A, r)$ gauname, kad $V(A) = V_1(A)$. Visiškai tai pat iš pareinamybių $S_1\left(A, \frac{r}{n}\right) \subset S_2(A, r) \subset S_1(A, r)$ darome išvadą, kad $V_2(A) = V_1(A)$. Tokiu būdu, metrikos $|AB|$, ρ_1 ir ρ_2 , nors jos yra skirtingos, bet *albėje $\mathbb{R}^n$ apibrėžia tą pačią topologiją*.

10 pratimas. Erdvės $\mathbb{R}^n$ topologija, apibrėžta bet kurios iš metrikų $|AB|$, ρ_1 , ρ_2 , sutampa su $\mathbb{R}^n$ kaip realiosios tiesės $\mathbb{R}$ *n* egzempliorių sandaugos topologija. (Tai geriausiai matosi, naudojant metriką ρ_1 .)

Grįšime prie bendrosios teorijos. Iš nagrinėtų pavyzdžių (ypač iš 4 pavyzdžio) galime padaryti šitokią išvadą:

jei aibė X turi daugiau kaip vieną elementą, tai joje egzistuoja keletas (ar net be galo daug) skirtingų topologijų.

7 apibrėžimas. Tarkime, kad X, Y – topologinės erdvės ir $f : X \rightarrow Y$ – funkcija. Sakoma, kad funkcija f yra tolydi (arba tolydinė) taške $A \in X$, jei taško $f(a)$ bet kurios aplinkos V pirmavaizdis $f^{-1}(V)$ (žr. (1.17)) yra taško a aplinka. Funkcija f vadinama tolydžia, jei ji tolydi kiekviename erdvės X taške.

Pastaba. Kad f būtų tolydi taške a , pakanka (aišku, ir būtina), kad $f^{-1}(V)$ būtų taško a aplinka, kokią bepaimtume V iš kažkurios fundamentalios taško $f(a)$ aplinkų sistemos (įrodykite). Pa-

vyzdžiui, kad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ būtų tolydi taške $a \in \mathbb{R}$ (čia $\mathbb{R}$ – realioji tiesė), pakanka, kad bet kuriam $\varepsilon > 0$ egzistuotų $\delta > 0$ toks, kad

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

nes aibės $\{y \in \mathbb{R} : |y - f(a)| < \varepsilon\}$, kur ε – bet koks teigiamas skaičius, sudaro taško $f(a) \in \mathbb{R}$ fundamentalią aplinkų sistemą.

4 teiginys. Jei $f: X \rightarrow Y$ tolydi taške $a \in X$, o $g: Y \rightarrow Z$ tolydi taške $f(a) \in Y$, tai $g \circ f: X \rightarrow Z$ (žr. (1.14)) tolydi taške a .

Irodymas. $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ yra taško $a \in X$ aplinka, jei W – taško $g(f(a))$ aplinka nes, $g^{-1}(W)$ yra taško $f(a)$ aplinka. ●

5 teiginys. Sakykime, topologinėse erdvėse X, Y visų atvirųjų aibių T -sistemos yra $O, \tilde{O}$ (t.y. O yra visų atvirųjų aibių T -sistema erdvėje X , o $\tilde{O}$ – erdvėje Y). Funkcija $f: X \rightarrow Y$ yra tolydi tada ir tik tada, kai

$$V \in \tilde{O} \Rightarrow f^{-1}(V) \in O.$$

(Pakanka ir silpnesnės sąlygos:

$$V \in \tilde{L} \Rightarrow f^{-1}(V) \in O;$$

čia L – kokia nors atviroji bazė erdvėje Y .)

Irodymas.

($\Rightarrow$) Erdvėje Y atvira netuščia aibė V yra kiekvieno savo taško aplinka. Reiškia, jos pirmavaizdis $f^{-1}(V)$ yra kiekvieno jam priklausančio taško aplinka, t. y. $f^{-1}(V)$ atvira.

($\Leftarrow$) Taško $f(a)$ atviros aplinkos pirmavaizdis yra atvira aibė, todėl taško a aplinka. ●

11 pratimas. Kokia bebūtų erdvių X, Y topologija, funkcija-konstanta (t. y. funkcija, kuri kiekvienam $x \in X$ priskiria vieną ir tą patį erdvės Y elementą) yra tolydi. Šiais dviem atvejais bet kuri $f \in Y^X$ yra tolydi:

- 1) kai X yra diskretiškoji, o Y – bet kokia erdvė;
- 2) kai erdvės Y topologija yra silpniausioji, o X – bet kokia erdvė.

Gamtos moksluose ir technikoje sutinkamos funkcijos dažniausiai būna apibrėžtos erdvės $\mathbb{R}^m$ kažkuriame poerdvyje ir įgyja reikšmės erdvėje $\mathbb{R}^n$. Svarbiausias atvejis čia yra $m=n=1$. Dauguma tokių pritaikymuose

naudojamų funkcijų yra tolydžios, ir tai yra labai svarbu. Pavyzdžiui, jei į 4 tonų keliamosios galios savivartę pakrauta 4 tonos žvyro, tai nieko neatsitiks, jei dar užmesime porą kastuvų. Kodėl? – Todėl, kad funkcija $x \mapsto f(x)$, kur x – savivartės krovinio svoris (tonomis), o $f(x)$ – tam svariui pavežti reikalingas galingumas, yra tolydi. Tikrai, 4 tonų keliamosios galios savivartę gali išvystyti ne tik $f(4)$ galingumą, bet ir $f(4) + \epsilon$; čia $\epsilon > 0$ – nelabai didelis. Kadangi funkcija f yra tolydi, tai egzistuoja toks $\delta > 0$, kad $f(4+h) < f(4) + \epsilon$, kai $0 \leq h \leq \delta$. Šį kartą h – tų užmestų poros kastuvų žvyro svoris (tonomis). (Beje, ir iš pradžių buvo pakrauta tik maždaug 4 tonos – gal kiek daugiau arba mažiau.) Arba toks pavyzdys: jokios detalės nepagaminame absoliučiai tiksliai. Net naujo automobilio besisukančios dalys nėra idealiai subalansuotos – truputį bilda, vibruoja. Tačiau tas bildesys, vibravimas priklauso nuo nesubalansuotumo tolydžiai. Detalės atlaiko vibravimą, nevirsijantį tam tikro dydžio $\epsilon > 0$, ir dėl minėto tolydumo egzistuoja toks $\delta > 0$, kad kol nesubalansuotumo dydis nesiokia šio δ , tai vibravimas yra mažesnis už ϵ , o automobilis rieda – ir dar ilgai riedės.

8 apibrėžimas. Tarkime, kad X, Y – topologinės erdvės, o $f: X \rightarrow Y$ – bijekcija. Jei f ir f^{-1} yra tolydžios, tai f vadinama *homeomorfizmu* (erdvės X ant erdvės Y), o erdvės X ir Y vadinamos *homeomorfiškomis*.

Pastaba. Naudojant 5 teiginio žymėjimus, jei $f: X \rightarrow Y$ – homeomorfizmas, o V – atvira aibė erdvėje Y (t. y. $V \in \tilde{\mathcal{O}}$), tai $f^{-1}(V)$ yra atvira, nes f tolydi; visiškai taip pat jei U – atvira aibė erdvėje X (t. y. $U \in \mathcal{O}$), tai $f(U)$ yra atvira aibė erdvėje Y , nes $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, o f^{-1} – tolydi. Vadinasi, $f(\mathcal{O}) = \tilde{\mathcal{O}}$ (čia $f(\mathcal{O}) = \{f(U) : U \in \mathcal{O}\}$); kitaip sakant, erdvės X ir Y topologiniu požiūriu yra vienodos.

Pavyzdžiui, tarkime, kad $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, $Y = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\tilde{\mathcal{O}} = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$. Tada bijekcija $X \ni i \mapsto a_i \in Y$ yra homeomorfizmas.

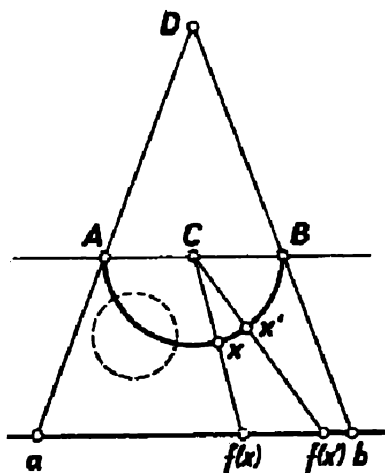
12 pratimas. Jei $f: X \rightarrow Y$ – bijekcija, o $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ ir $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{P}(Y)$; tai f – homeomorfizmas. Bet kokia bijekcija $f: X \rightarrow Y$ bus homeomorfizmas ir tuo atveju, kai $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, $\tilde{\mathcal{O}} = \{\emptyset, Y\}$.

6 teiginys. Jei $f : X \rightarrow Y$ ir $g : Y \rightarrow Z$ – homeomorfizmai, tai $g \circ f : X \rightarrow Z$ – homeomorfizmas.

Įrodymas. $g \circ f$ tolydi (žr. 4 teiginį). Kadangi $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$, kokį bepaimtumę $z \in Z$, tai $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Bet g^{-1} ir f^{-1} – tolydžios, todėl $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ tolydi dėl to paties 4 teiginio. ●

13 pratimas. Sugalvokite pavyzdį, iš kurio būtų matyti, kad teiginys, atvirkščias 6 teiginiui, nėra teisingas.

Aprašysime įdomesnį pavyzdį. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ imkime kokio nors spindulio pusapskritimį $A \times B$ (8 brėž.). Atmeskime pusapskritimio galus A, B ir likusią pusapskritimio taškų aibę pažymėkime X . Raide C pažymėkime atkarpos AB vidurį (apskritimo



8 brėž.

centrą). Kaip plokštumos $\mathbb{R}^2$ poerdvis, X yra topologinė erdvė: pavyzdžiui, atvirą bazę joje sudaro bet kokio ilgio „atviri“ lankeliai, t. y. lankeliai be galų (kaip plokštumos atvirų skritulių sankirtos su X). Raide Y pažymėkime kokią nors tos pačios plokštumos tiesę, lygiagrečią skersmeniui AB ir nesutampančią su juo. Projektavimas f iš apskritimo centro C į tiesę Y atvaizduoja X ant Y bijectyviai ir yra homeomorfizmas erdvės X ant erdvės Y . Tikrai, pusapskritimio X bet kurio atviro lankelio, jungiančio x su x' , vaizdas yra tiesės Y atviras intervalas, jungiantis $f(x)$ su $f(x')$. Atvirkščiai, bet kurio atviro tiesės Y intervalo, tarkime, jungiančio p su q , pirmavaizdis yra pusapskritimio X atviras lankelis, jun-

giantis $f^{-1}(p)$ su $f^{-1}(q)$. Tuo būdu, pusapskritimis X ir visa tiesė Y yra homeomorfiškos (t. y. kaip topologinės erdvės – vienodos).

Jei projektuosime iš taško D , esančio virš skersmens AB (paprastumo dėlei, statmenyje, iškeltame iš C į AB), tai pusapskritimio X vaizdas tiesėje Y bus atviras intervalas, tarkime, jungiantis a su b (8 brėž.). Kaip ir anksčiau, galime patikrinti, kad šis projektavimas yra homeomorfizmas pusapskritimio X ant tiesės atviro intervalo. Vadinasi, (dėl 6 teiginio) *realioji tiesė $\mathbb{R}$ ir bet kuris jos atviras intervalas $]a, b[$ (kaip realiosios tiesės $\mathbb{R}$ poerdvis) yra homeomorfiškos erdvės; čia $a < b$.*

14 pratimas. Kaip realiosios tiesės $\mathbb{R}$ poerdviai, intervalai $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ir $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ yra homeomorfiški tiesei $\mathbb{R}$.

Išplėstoji tiesė $\bar{\mathbb{R}}$. Ką tik aprašytame pavyzdyje, projektuodami iš centro C , gavome, kad $\mathbb{R}$ yra homeomorfiška neturinčiam galų pusapskritimiui X . Bet galime imti pusapskritinį su galais A ir B , t. y. pusapskritinį AxB . Projektuojant iš C , pusapskritimio galų A ir B jau neatitinka jokie tiesės $Y = \mathbb{R}$ taškai. Imkime tiesės $\mathbb{R}$ elementus (visus realiuosius skaičius) ir dar du elementus, kuriuos pažymėkime $+\omega$ ir $-\omega$. Išplėstąją tiesę $\bar{\mathbb{R}}$ laikoma aibė $\{-\omega\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\omega\}$. Susitarkime laikyti, kad projektavimas f iš centro C pusapskritimio galui A priskiria aibės $\bar{\mathbb{R}}$ elementą $-\omega$, o galui B – elementą $+\omega$. Pusapskritimis AxB (su galais), kaip plokštumos $\mathbb{R}^2$ poaibis, turi topologiją, indukuotą plokštumos topologijos. Išplėstoje tiesėje $\bar{\mathbb{R}}$ atviromis aibėmis laikykime pusapskritimio AxB (kaip $\mathbb{R}^2$ poerdvio) atvirų aibių vaizdus, gautus su f pagalba. Tuo $\bar{\mathbb{R}}$ paverčiame topologine erdve. Kadangi pusapskritimis AxB (su galais) yra homeomorfiškas skaičių intervalui $[a, b]$ (dėka projektavimo iš D), tai $\bar{\mathbb{R}}$ homeomorfiška tiesės $\mathbb{R}$ poerdviui $[a, b]$ ($a < b$).

Pastaba. Vietoj simbolių $-\omega$ ir $+\omega$ dažniau rašoma $-\infty$ ir $+\infty$. Topologiniu požiūriu ∞ – tai tas pats, kas ir atkarpos $[a, b]$ galas b , nes $\mathbb{R}$ homeomorfiška atviram intervalui $]a, b[$.

Papildant (1.6) formules, dar vartojami tokie „skaičių intervalai“:

$$\begin{aligned}]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad [a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (3.11) \\]-\infty, +\infty[&= \mathbb{R} \quad (a, b \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Tolydžią funkciją dažnai bandoma vaizduotis kaip tokią funkciją, kurios grafikas yra „nesutrūkinėjęs“, rišlus. Pavyzdžiui, funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ – tolydi, ir jos grafikas (2 brėž.) – rišlus, o funkcija (vadinama Dirichlės funkcija)

$$x \mapsto \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei } x \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{jei } x \text{ iracionalus,} \end{cases}$$

nė viename taške nėra tolydi; jos grafikas taip sutrūkinėjęs, kad net neįmanoma nupiešti. Išsiaiškiname, kas tai yra rišlumas ir kiek rimta manyti, kad tolydi funkcija – tai funkcija, kurios grafikas rišlus.

9 apibrėžimas. *Topologinė erdvė X vadinama rišlia, jei ji nėra junginys dviejų atvirų netuščių nesikertančių* aibių. Priešingu atveju erdvė X vadinama nerišlia. Aibė X' topologinėje erdvėje X vadinama rišlia (arba nerišlia), jei X' , kaip erdvės X poerdvis, yra rišli (atitinkamai, nerišli) erdvė.*

Pavyzdžiui, visų racionalių skaičių aibė $\mathbb{Q}$, kaip realiosios tiesės poerdvis, yra nerišli. Tikrai, pavyzdžiui, aibės $\{r \in \mathbb{Q} : r < \sqrt{2}\}$ ir $\{r' \in \mathbb{Q} : r' > \sqrt{2}\}$ yra netuščios, neturinčios bendrų elementų ir atviros poerdvyje $\mathbb{Q}$, nes $\{r \in \mathbb{Q} : r < \sqrt{2}\} = \mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$, o $\{r' \in \mathbb{Q} : r' > \sqrt{2}\} = \mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, +\infty[$; čia $]-\infty, \sqrt{2}[$, $]\sqrt{2}, +\infty[$ yra atviros aibės erdvėje $\mathbb{R}$.

15 pratimas. Diskretiška erdvė, turinti ne mažiau kaip du taškus, yra nerišli. Bet kuri erdvė X su silpniausiaja topologija (t. y. turinti tik dvi atviras aibes: $\emptyset$ ir X) yra rišli.

Sekančiame teiginyje raide G žymime funkcijos $f : X \rightarrow Y$ grafiką.

7 teiginys. Tarkime, kad X ir Y – topologinės erdvės. Kad funkcija $f : X \rightarrow Y$ būtų tolydi, būtina ir pakanka, kad funkcija $g : X \ni x \mapsto (x, f(x)) \in G$ būtų homeomorfizmas erdvės X ant grafiko G kaip erdvės $X \times Y$ poerdvio.

* Aibės U ir V vadinamos nesikertančiomis, jei $U \cap V = \emptyset$

Irodymas. Funkcija $g : x \mapsto (x, f(x))$ yra bijekcija aibės X ant aibės G ; jai atvirkštinė funkcija yra $g^{-1} : (x, f(x)) \mapsto x$.

($\Rightarrow$) Tarkime, kad $f : X \rightarrow Y$ – tolydi. Taško $(x, f(x)) \in X \times Y$ bet kurioje aplinkoje guli aplinka $U \times V$; čia U – taško x aplinka erdvėje X , o V – taško $f(x)$ aplinka erdvėje Y . Kadangi f – tolydi, tai $f^{-1}(V)$ taip pat yra taško x aplinka erdvėje X , todėl $U' = U \cap f^{-1}(V)$ yra taško x aplinka. Bet $g(U') \subset U \times V$, nes jei $x' \in U'$, tai $g(x') = (x', f(x')) \in U' \times V \subset U \times V$; taigi g – tolydi.

Dabar imkime bet kurią x aplinką U erdvėje X . Tada taško $(x, f(x))$ aplinka* $G \cap (U \times Y)$ su funkcijos g^{-1} pagalba pervedama į aibę U . Taigi ir g^{-1} tolydi.

Tuo būdu, jei $f : X \rightarrow Y$ – tolydi, tai $g : X \rightarrow G$ – homeomorfizmas.

($\Leftarrow$) Atvirkščiai, tarkime, kad $g : X \rightarrow G$ ir $g^{-1} : G \rightarrow X$ – tolydžios. Imkime taško $f(x)$ kokią nors aplinką V . Dėl g tolydumo egzistuoja taško x aplinka U , kad $g(U)$ guli taško $(x, f(x))$ aplinkoje $G \cap (X \times V)$, t. y. jei $x \in U$, tai $f(x) \in V$. Tuo f tolydumas įrodytas (net g^{-1} tolydumo nenaudojome). ●

7 teiginys tiksliai atsako į anksčiau pasakytą klausimą: jei X – nerišli erdvė, o $f : X \rightarrow Y$ – tolydi funkcija, tai jos grafikas G būtinai yra nerišlus. Kadangi klasikinėje matematikoje tiriamos daugiausia funkcijos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o $\mathbb{R}$, kaip matysime § 7, yra rišli, todėl ir susidarė įspūdis, kad tolydžios – tai funkcijos, turinčios nesutrūkinėjusį grafiką.

Įrodysime dar vieną naudingą teiginį.

8 teiginys. Jei X – rišli topologinė erdvė, Y – bet kokia topologinė erdvė ir $f : X \rightarrow Y$ – tolydi funkcija, tai $f(X)$ yra rišli aibė erdvėje Y .

Irodymas. Įsitikinsime, kad jei $f(X)$ – nerišli, tai ir X nerišli (todėl, jei X – rišli, tai $f(X)$ negali būti nerišli). Jei $f(X)$ – nerišli, ir U, V – atviros aibės erdvėje Y , turinčios savybes

- 1) $U \cap f(X) \neq \emptyset, V \cap f(X) \neq \emptyset,$
- 2) $f(X) \subset U \cup V$ ir

*Aplinka erdvės $X \times Y$ poerdvyje G .

$$3) (U \cap f(X)) \cap (V \cap f(X)) = \emptyset,$$

tai aibių U, V pirmavaizdžiai $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ bus atviros aibės erd-
vėje X (dėl f tolydumo, žr. 5 teiginį), turinčios savybes

$$1') f^{-1}(U) \neq \emptyset, f^{-1}(V) \neq \emptyset \text{ (dėl 1))},$$

$$2') X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \text{ (dėl 2))},$$

$$3') f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset,$$

t. y. X bus nerišli.

Pastaba. $f(X)$ gali būti rišli ir tada, kai 8 teiginio sąlygos nėra patenkinamos. Pavyzdžiui, imkime realiosios tiesės poerdvį $X = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ (jis yra nerišlus: $X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, o $]-\infty, 0[$ ir $]0, +\infty[$ yra atviros, netuščios, nesikertančios aibės); funkciją $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ apibrėžkime taip:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{jei } x > 0 \text{ iracionalus,} \\ 0, & \text{jei } x > 0 \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{jei } x < 0 \text{ iracionalus,} \\ -x^{-1}, & \text{jei } x < 0 \text{ racionalus.} \end{cases}$$

Ši funkcija nėra tolydi nė viename taške, o $f(X) = [0, +\infty[$ yra rišli aibė (žr. § 7).

Paragrafą užbaigsime keletu topologinių sąvokų, kurios bus naudojamos ateityje. 10 ir 11 apibrėžimuose kalbame apie (bet kokią) topologinę erdvę X , kurios visų atvirųjų aibių T -sistema yra $\mathcal{O}$, o kurio nors taško $x \in X$ aplinkų filtrą – $V(x)$.

10 apibrėžimas. *Uždara aibė – tai CU ; čia $U \in \mathcal{O}$.*

16 pratimas. Baigtinės uždaryjū aibių šeimos junginys yra uždara aibė. Bet kokios uždaryjū aibių šeimos sankirta yra uždara aibė.

17 pratimas. Jei X – metrinė erdvė su metrika ρ , tai rutulys $\{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$ yra uždara aibė.

11 apibrėžimas. *Sakoma, kad $x \in X$ liečia aibę $M \subset X$, jei $V \cap M \neq \emptyset$, kokią bepatmtume $V \in V(x)$. Aibės $M \subset X$ uždarinys yra aibė*

$$\overline{M} = \{x \in X : x \text{ liečia aibę } M\}.$$

Aibė $M \subset X$ vadinama tiršta, jei $\overline{M} = M$. $x \in X$ vadinamas aibės M vidiniu tašku, jei $M \in V(x)$; aibės M visų vidinių taškų aibė žy-

mima $\text{Int } M$ ir vadinama aibės M vidumi. $x \in X$ vadinamas išoriniu (aibei M) tašku, jei $x \in \text{Int}(CM)$; visų aibei M išorinių taškų aibė žymima $\text{Ext } M$ ir vadinama aibės M išore; taigi $\text{Ext } M = \text{Int}(CM)$. Aibės M kontūras yra aibė $\text{Fr } M = \overline{M} \cap (CM)$. Sakoma, kad U – aibės M aplinka, jei $M \subset \text{Int } U$.

18 pratimas. $M \subset \overline{M}$. M uždara tada ir tik tada, kai $\overline{M} = M$.

Jei $M \subset M_1 \subset \overline{M}$, tai $\overline{M_1} = \overline{M}$.

19 pratimas. Visu racionaliųjų skaičių aibė Q yra tiršta realiojoje tiesėje R . Visų iracionaliųjų skaičių aibė taip pat tiršta erdvėje R .

Pastaba. Reikia pabrėžti, kad sąvokos „atvira aibė“, „uždara aibė“, „aibės uždarinys“ ir t. t. turi prasmę tik tada, kai griežtai pasakvta, apie kuria erdvę X kalbama. Pavyzdžiui, erdvėje R visu racionaliųjų skaičių aibė Q nėra nei atvira, nei uždara, o erdvėje O (kaip erdvės R poerdvyje) yra ir atvira, ir uždara. Arba anksčiau aprašytame pavyzdyje pusapskritimio X „atviri“ lankeliai yra atviros aibės erdvėje X , bet nėra atviros plokštumoje R^2 .

§ 4. RIBOS

Prisiminę žinomą pasaką apie ežio ir kiškio lenktynes (kurias laimėjo ežys), tarkime, kad ežys iš tikrųjų bėga priekyje v m/s greičiu, o kiškis jį vejasi, bėgdamas V m/s greičiu ($V > v$). Duotuoju momentu atstumas tarp jų yra d metrų. Per kiek sekundžių kiškis pavys ežį? Koki atstumą kiškiui teks nubėgti, kol pavys? Tuos d metrų kiškis nubėgs per $\frac{d}{V}$ sekundžių. Bet per šį laiką ežys pabėgęs į priekį $v \cdot \frac{d}{V}$ metrų, taigi, per $\frac{d}{V}$ sekundžių kiškis dar nepavys ežio: po šių $\frac{d}{V}$ sekundžių atstumas tarp jų bus $d_1 = \frac{v}{V} d$ metrų ($d_1 < d$, nes $\frac{v}{V} < 1$). Nuotoli d_1 metrų kiškis nubėgs per $\frac{d_1}{V}$ sekundžių, o per $\frac{d_1}{V}$ sekundžių ežys pabėgęs į priekį $v \cdot \frac{d_1}{V}$ metrų. Ir vėl ežys kiškio nepavijo: dabar tarp jų atstumas yra $d_2 = \left(\frac{v}{V}\right)^2 d$ metrų ($d_2 < d_1$). Taip samprotaudami, matome, kad kiškis ežį pavys per

$$\frac{d + d_1 + d_2 + \dots}{V} \text{ sekundžių}$$

ir, kol pavys, nubėgs $d + d_1 + d_2 + \dots = \left[1 + \frac{v}{V} + \left(\frac{v}{V} \right)^2 + \dots \right] \cdot d$ metrų. Laužtiniuose skliaustuose esanti suma turi be galo daug dėmenų ir yra skai-tytojui pažįstama mažėjančios geometrinės progresijos narių suma; ji gaunama kaip riba ir yra lygi $\frac{1}{1 - \frac{v}{V}} = \frac{V}{V - v}$. Vadinasi, kiškis, kol pavys

ežį, nubėgs $\frac{V}{V - v} \cdot d$ metrų ir užtruks $\frac{d}{V - v}$ sekundžių. Gauti kaip ribos, šie rezultatai – akivaizdūs, jei galvotume kitaip: per sekundę atstumas tarp kiškio ir ežio sumažėja $V - v$ metrais, todėl d metrais sumažės per $\frac{d}{V - v}$ sekundžių.

Matome, kad ir gyvenimiškose situacijose gali prireikti ribų. Ilgą laiką ribos sąvoka buvo apgaubta mistikos. Iš šio paragrafo skaitytojas pamatys, kad ši sąvoka (žr. 1 ir 2 apibrėžimus) yra tiek pat nesudėtinga, kaip ir visos tos, kurios šioje knygutėje aprašomos: ribos apibrėžimui reikia 1) filtro ir 2) topologijos.

Susitarkime dėl žymėjimų. Nagrinėsime dvi topologines erdves – X ir Y . Jei kokia nors konstrukcija erdvėje X bus pažymėta, tarkime, raide A , tai analogišką konstrukciją erdvėje Y žymėsime $\tilde{A}$. Pavyzdžiui, T -funkcija, apibrėžianti topologiją erdvėje X , žymima V , o erdvėje Y – raide $\tilde{V}$.

1 apibrėžimas. Tarkime, kad $\tilde{F}$ – filtras topologinėje erdvėje Y . Taškas $y \in Y$ yra vadinamas filtro $\tilde{F}$ riba, jei $\tilde{V}(y) \subset \tilde{F}$, t. y. jei

$$V \in \tilde{V}(y) \Rightarrow V \in \tilde{F}. \quad (4.1)$$

(Kaip sakėme, $\tilde{V}(y)$ yra taško y visų aplinkų filtras erdvėje Y .)

Pastaba. (4.1) sąlyga yra ekvivalentiška šitokiai sąlygai:

$$V \in \tilde{B}(y) \Rightarrow V \in \tilde{F}; \quad (4.1')$$

čia $\tilde{B}(y)$ – taško y kokia nors fundamentali aplinkų sistema.

Tikrai, jei $W \in \tilde{V}(y)$, tai egzistuoja $V \in \tilde{B}(y)$, $V \subset W$. Dėl (4.1') $V \in \tilde{F}$, o iš filtro aksiomos (F_1) gauname, kad $W \in \tilde{F}$. Tuo įrodėme (4.1) $\Leftarrow$ (4.1'). Iš $\tilde{B}(y) \subset \tilde{V}(y)$ turime (4.1) $\Rightarrow$ (4.1').

1 pratimas. Filtras $\tilde{F}$, generuotas vienelemenčio poaibio $\{y\} \subset Y$ (t. y. $\tilde{F}$ yra rinkinys visų tų aibės Y poaibių, kuriems priklauso y , žr. 1 pratimą iš § 2), turi ribą (ir tik vieną). Taškas y yra jo riba.

2 pratimas. Jei erdvė Y turi silpniausią topologiją (t. y. jos visų atvirųjų aibių T -sistema $\tilde{O} = \{\emptyset, Y\}$, tai kiekvienas $y \in Y$ yra bet kurio filtro $\tilde{F} \subset P(Y)$ riba.

3 pratimas. Realiojoje tiesėje R filtras, generuotas poaibio $[a, b[$ ($a < b$), neturi nė vienos ribos.

2 apibrėžimas. Sakykime, duota aibė X , filtras $F \subset P(X)$, topologinė erdvė Y ir funkcija $f: X \rightarrow Y$. Pažymėkime $\tilde{F}$ filtrą (erdvėje Y), kurio bazė yra $f(F)$ (žr. § 2 pabaigą). *Taškas $y \in Y$ vadinamas funkcijos f riba filtro F atžvilgiu, jei y yra filtro $\tilde{F}$ riba; rašoma $y = \lim_F f$.*

Lema. Tarkime, kad X, Y – aibės, $f: X \rightarrow Y$ – funkcija, F filtras aibėje X ir $\tilde{F}$ – filtras (aibėje Y), kurio bazė yra $f(F)$. Tada sekantios savybės yra ekvivalentiškos:

- 1) $V \in \tilde{F}$;
- 2) egzistuoja $F \in F$ tokia, kad $f(F) \subset V$;
- 3) $f^{-1}(V) \in F$.

Irodymas. 1) $\Rightarrow$ 2), nes jei $V \in \tilde{F}$, tai egzistuoja filtro $\tilde{F}$ bazei $f(F)$ priklausančios aibės Y poaibis, gulįs aibėje V , o toks poaibis turi pavidalą $f(F)$; čia $F \in F$.

2) $\Rightarrow$ 3), nes iš $f(F) \subset V$ turime $F \subset f^{-1}(V)$ ir, panaudoję filtro aksiomą (F_1), iš to gauname, kad $f^{-1}(V) \in F$.

3) $\Rightarrow$ 1), nes jei $f^{-1}(V) \in F$, tai, pažymėję aibę $f^{-1}(V)$ raide F , turėsime, kad $f(F) = f(f^{-1}(V)) \subset V$, t. y. $V \in \tilde{F}$. ●

1 teiginys. (Naudojame 2 apibrėžimo žymėjimus.) Šios trys savybės yra ekvivalentiškos:

$y \in Y$ yra funkcijos f riba filtro F atžvilgiu;

$$V \in \tilde{V}(y) \Rightarrow \text{egzistuoja tokia } F \in F, \text{ kad } f(F) \subset V; \quad (4.2)$$

$$V \in \tilde{V}(y) \Rightarrow f^{-1}(V) \in F. \quad (4.3)$$

Irodymas. Pirmoji iš jų yra (4.1) savybė, kur $\tilde{F}$ – filtras, turįs bazę $f(F)$, ir lieka panaudoti lemą. ●

Pastaba. (4.2) ir (4.3) sąlygose reikalavimą „ $V \in \tilde{V}(y)$ “ galima pakeisti reikalavimu „ $V \in \tilde{B}(y)$ “, kur $\tilde{B}(y)$ – bet kokia filtro $\tilde{V}(y)$ bazė, nes (4.1) $\Leftrightarrow$ (4.1'). Tuo būdu, *sekantys trys teiginiai yra ekvivalentiški*:

$y \in Y$ yra funkcijos f riba filtro F atžvilgiu;

$$V \in \tilde{B}(y) \Rightarrow \text{egzistuoja } F \in \mathcal{F} \text{ tokia, kad } f(F) \subset V; \quad (4.2')$$

$$V \in \tilde{B}(y) \Rightarrow f^{-1}(V) \in F; \quad (4.3')$$

čia $B(y)$ – taško y kokia nors fundamentali aplinkų sistema.

Pavyzdžiai:

1. Sekos riba. Topologinėje erdvėje Y nagrinėkime kokią nors seką

$$N \ni n \mapsto y_n \in Y. \quad (4.4)$$

Aibėje N turime Frešės filtrą E (žr. § 2). Jei $y \in Y$ yra (4.4) funkcijos riba Frešės filtro atžvilgiu, tai y vadinamas sekos (y_n) riba ir rašoma $y = \lim y_n$ arba $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Frešės filtrą E sudaro aibės N baigtinių poaibių papildiniai, todėl, jei $E \in E$, tai egzistuoja $n_0 \in N$ toks, kad $n > n_0 \Rightarrow n \in E$, t. y. aibės $\{0, 1, 2, \dots, n_0\}$ papildinys $C\{0, 1, 2, \dots, n_0\}$ yra aibės E poaibis. Kad būtų trumpiau, Frešės filtro E elementą $C\{0, 1, 2, \dots, n_0\}$ pažymėkime F_{n_0} . (Tai, kad bet kurioje $E \in E$ guli pavidalo F_{n_0} aibė, reiškia, kad aibės F_{n_0} , $n_0 \in N$, sudaro Frešės filtro E bazę.)

Jei f yra (4.4) funkcija, tai sąlyga $f(F_{n_0}) \subset V$ reiškia, kad $n > n_0 \Rightarrow y_n \in V$. Iš to, panaudoję (4.2), gauname įprastą sekos ribos charakterizavimą:

$y \in Y$ yra sekos (y_n) riba tada ir tik tada, kai, kokią bepaimtume taško y aplinką V , egzistuoja toks* $n_0 \in N$, kad $n > n_0 \Rightarrow y_n \in V$. (4.5)

Dėl (4.2') čia pakanka imti V , priklausančias tik kokiai nors fundamentaliajai taško y aplinkų sistemai.

Realiosios tiesės atveju tai reiškia:

$y \in \mathbb{R}$ yra sekos (y_n) ($y_n \in \mathbb{R}$) riba tada ir tik tada, kai bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $n_0 \in N$, kad

$$n > n_0 \Rightarrow y_n \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[. \quad (4.6)$$

* Šis n_0 , bendrai imant, priklauso nuo V ; taigi ir (4.6) formulėje n_0 priklauso nuo ε .

Iš tikrųjų, atviri intervalai $y - \epsilon, y + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) sudaro realiosios tiesės taško y fundamentaliąją aplinkų sistemą.

2. Riba $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Tarkime, kad ne tik Y , bet ir X yra topologinė erdvė. Be to, sakykime, duota funkcija $f: X \rightarrow Y$. Imkime erdvės X koki nors tašką a . $V(a)$ – taško a visų aplinkų filtrą. Funkcijos f riba filtro $V(a)$ atžvilgiu ir yra žymima simboliu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Tuo būdu, naudojant (4.2), užrašas $y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (skaitome: „ y yra funkcijos $f(x)$ riba, kai x artėja į a “) reiškia, kad

kokią bepaimtumę taško y aplinką V , egzistuoja taško a tokia aplinka U , kad $f(U) \subset V$. (4.7)

(Čia irgi pakanka imti $V \in \bar{B}(y)$.) Iš (4.3) kriterijaus tiesiogiai gauname šitokią išvadą:

$f: X \rightarrow Y$ yra tolydi taške a tada ir tik tada, kai $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. (4.8)

3. Ribos $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ ir $\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x)$. Tarkime, kad X – topologinė erdvė ir kad taškas $a \in X$ liečia aibę $A \subset X$ (t. y. $V \cap A \neq \emptyset$, kokią bepaimtumę $V \in V(a)$ (žr. 11 apibrėžimą iš § 3)). Tada aibės $V \cap A$ ($V \in V(a)$) sudaro filtrą aibėje A (patikrinkite!); pažymėkime šį filtrą raide F , t. y. $F = \{V \cap A : V \in V(a)\}$. Jei duota funkcija $f: A \rightarrow Y$, kur Y – topologinė erdvė, tai funkcijos f riba šio filtro F atžvilgiu žymima

$$\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x). \quad (4.9)$$

Pavyzdžiui, jei a liečia aibę $C \setminus \{a\}$, tai galima kalbėti apie $\lim_{x \rightarrow a, x \in C \setminus \{a\}} f(x)$. Vietoj $\lim_{x \rightarrow a, x \in C \setminus \{a\}} f(x)$ paprastai rašoma

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x). \quad (4.10)$$

Klasikinėje analizėje $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ ir naudojamos tik (4.9) ir (4.10)

ribos, o užrašas $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (arba $y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$), kai $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, reiškia, kad y yra

(4.9) pavidalo riba, imant $X = \bar{\mathbb{R}}$ (išplėstąjį realiųjų skaičių tiesę), $A = \mathbb{R}$ ir $a = +\infty$ (arba, atitinkamai, $-\infty$). Analogiškai, užrašas $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ (arba $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$), kai $y_n \in \mathbb{R}$, reiškia, kad į seką (y_n) žiūrime kaip į seką erdvėje $\bar{\mathbb{R}}$, ir $+\infty$ (arba $-\infty$) yra tos sekos riba. Kada rašoma $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (arba $-\infty$)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ($-\infty$), jei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tai turima omeny, kad $+\infty$ ($-\infty$) yra

(4.9) pavidalo riba, imant $X = \bar{\mathbb{R}} = Y$, $A = \mathbb{R}$ ir $a = +\infty$ arba $-\infty$. Panašią prasmę turi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (arba $-\infty$).

Pastaba. Kalbant apie (4.9) ribą, funkcija f gali būti apibrėžta kažkuriame erdvės X poaibyje X' , aprėpiančiame poaibį A , t. y. $f: X' \rightarrow Y$; čia $A \subset X' \subset X$. Tokia funkcija f apibrėžia funkciją $A \ni x \mapsto f(x) \in Y$, žymimą $f|_A$. Simbolio $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f|_A(x)$ vietoj taip pat rašoma (4.9).

Grijtame prie bendros teorijos.

Teorema. Tarkime, kad X — topologinė erdvė. Šie du teiginiai yra ekvivalentiški:

(H) jei $x \neq y$ — taškai iš X , tai egzistuoja $U \in \mathcal{V}(x)$ ir $V \in \mathcal{V}(y)$ tokios, kad $U \cap V = \emptyset$;

(H_I) nė vienas filtras erdvėje X neturi dviejų ribų.

Sąlyga (H) vadinama Hausdorfo aksioma.

Irodymas. (H) $\Rightarrow$ (H_I). Tarkime, kad (H_I) negalioja, t. y. egzistuoja filtras $F \subset \mathcal{P}(X)$, turįs dvi ribas x ir y , $x \neq y$. Dėl (4.1) tai reiškia, kad $V(x) \subset F$ ir $V(y) \subset F$. Todėl, kokias bepaimtume $U \in V(x)$ ir $V \in V(y)$, jų sankirta $U \cap V \neq \emptyset$ (žr. filtro aksiomą (F_{II})), t. y. ir (H) negalioja. (Todėl jei (H) galioja, tai (H_I) negali negalioti, t. y. (H) $\Rightarrow$ (H_I).)

(H) $\Leftarrow$ (H_I). Tarkime, kad (H) negalioja, t. y. erdvėje X egzistuoja tokie taškai x, y ($x \neq y$), kad $U \cap V \neq \emptyset$, jei $U \in V(x)$, $V \in V(y)$. Tokiu atveju aibės $U \cap V$ ($U \in V(x)$, $V \in V(y)$) sudarys bazę filtro (patikrinkite!), kurio ribomis bus ir x , ir y , t. y. negalios ir (H_I). ●

3 apibrėžimas. Topologinė erdvė X , kurioje galioja (H) (arba, tas pats, (H_I)), yra vadinama atskiriama (arba Hausdorfo) erdve. („Atskiriama“, nes bet kurie du jos taškai $x \neq y$ gali būti

„patalpinti“ į neturinčias bendrų taškų aplinkas, t. y. lyg ir „atskirti“ vienas nuo kito.)

4 pratimas. Atskiriamos erdvės poerdvis yra atskiriama erdvė.

5 pratimas. Metrinė erdvė yra atskiriama. Tuo būdu, pavyzdžiui $\mathbb{R}^n$ yra atskiriama, ir kiekvienas erdvės $\mathbb{R}^n$ poerdvis yra atskiriamas.

6 pratimas. Jei X turi ne mažiau kaip du taškus ir jos topologija yra silpniausia (t. y. $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$), tai X nėra atskiriama.

Pastaba. Kiekvienas, kuriam teko susipažinti su ribos sąvoka (pirmiausia – su sekos riba), aiškinosi ir principinį ribos vieninteliškumo klausimą. Kadangi tai dažniausiai būdavo realiųjų skaičių sekos ir, bendriau, funkcijos $f: X \rightarrow Y$, $Y = \mathbb{R}$, tai jų ribų vieninteliškumas buvo garantuotas. Dabar mums aišku, kad tai buvo erdvės $\mathbb{R}$ atskiriamumo pasekmė. Be to, minėjome, kad klasikinėje analizėje naudojamos (4.9) ir (4.10) ribos, bet ne riba $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, apibrėžta 2 pavyzdyje. To priežastis taip pat yra erdvės $Y = \mathbb{R}$ atskiriamumas, nes atskiriamos Y atveju, jei $y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, tai $y = f(a)$, ir (žr. (4.8)) funkcija f tolydi taške a . Tikrai, $f(a) \in f(U) \subset V$, t. y. $f(a)$ priklauso bet kuriai taško y aplinkai V , todėl $V \cap W \neq \emptyset$, jei $V \in \mathcal{V}(y)$, o $W \in \mathcal{V}(f(a))$. Dėl Y atskiriamumo tai įmanoma tik tada, kai $y = f(a)$.

2 teiginys. Tarkime, kad $f: X \rightarrow Y$ ir $g: X \rightarrow Y$ – tolydinės funkcijos (X, Y – topologinės erdvės). Jei Y – atskiriama, tai aibė $L = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ yra uždara (erdvėje X).

Irodymas. Parodysime, kad CL atvira. Jei $CL = \emptyset$, tai ji atvira. Todėl aptarkime atvejį $CL \neq \emptyset$. Imkime kokį nors $x_0 \in CL$. Tada $f(x_0) \neq g(x_0)$. Dėl Y atskiriamumo egzistuoja $U \in \bar{\mathcal{V}}(f(x_0))$ ir $V \in \bar{\mathcal{V}}(g(x_0))$ tokios, kad $U \cap V = \emptyset$. Dėl f ir g tolydumo $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x_0)$ ir $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$, todėl $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$ (žr. filtro aksiomą (F_{II})). Iš $U \cap V = \emptyset$, $f(W) \subset U$ ir $g(W) \subset V$ darome išvadą, kad $f(W) \cap g(W) = \emptyset$, t. y., kokį bepaimtume $x \in W$, $f(x) \neq g(x)$. Vadinas, $W \cap L = \emptyset$, kitaip sakant, $W \subset CL$. Iš filtro aksiomos (F_I) gauname, kad $CL \in \mathcal{V}(x_0)$, t. y. jei $x_0 \in CL$, tai $CL \in \mathcal{V}(x_0)$. Vadinas, CL – atvira, taigi, L – uždara. ●

Pavyzdžiui, jei $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ – tolydi funkcija, tai aibė $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ yra uždara (plokštumoje $\mathbb{R}^2$), nes funkcija-konstanta $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ yra tolydi. Antai, jei $f(x, y) = ax + by + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) ir bent vienas iš a ir b nelygus nuliui, tai aibė L yra tiesė, kurios lygtis $ax + by + c = 0$, taškų aibė. Ji yra uždara aibė, nes funkcija $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto ax + by + c \in \mathbb{R}$ – tolydi.

Išvada (tapatybių pratęsimo principas). Praeito teiginio sąlygose, jei L aprėpia aibę, tirštą erdvėje X , tai $f=g$, t. y. $f(x)=g(x)$ visiems $x \in X$.

Iš tikrųjų, jei L aprėpia tirštą aibę A , tai $X = \overline{A} \subset \overline{L}$, t. y. $\overline{L} = X$; bet $\overline{L} = L$ (L uždarumas), taigi, $L = X$. ●

3 teiginys. Jei $x \in X$ yra filtro $F \subset P(X)$ riba, o $f: X \rightarrow Y$ – tolydi taške x funkcija, tai $f(x)$ yra filtro $G \subset P(Y)$, kurio bazė $f(F)$, riba.

Irodymas. Duota, kad $V(x) \subset F$ ir kad $\tilde{V}(f(x)) \subset \tilde{F}$; čia $\tilde{F}$ – filtras, turįs bazę $f(V(x))$ (žr. (4.8)). Todėl $\tilde{V}(f(x)) \subset \tilde{F} \subset G$, t. y. $f(x)$ yra filtro G riba. ●

Pavyzdžiui, jei $x = \lim x_n$, tai $f(x) = \lim f(x_n)$ (kai $f: X \rightarrow Y$ – tolydi taške x).

§ 5. KOMPAKTIŠKUMAS

Tarkime, kad X – aibė ir $X' \subset X$. Sakoma, kad aibės X poaibių šeima $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ padengia aibę X' , jei $X' \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$; šeima (U_α) tada dar vadinama aibės X' padengimu.

Topologinės erdvės kompaktiškumas* reiškia, kad koks bebūtų tos erdvės padengimas (U_α) atviromis aibėmis U_α , jau baigtinis kiekis aibių U_α padengia visą erdvę. Svarbiausias kompaktiškos erdvės pavyzdys yra skaičių intervalas $[a, b]$ kaip realiosios tiesės $\mathbb{R}$ poerdvis (žr. § 7).

1 apibrėžimas. Tarkime, kad X – topologinė erdvė ir F – filtras joje. Sakoma, kad taškas $x \in X$ liečia filtrą F , jei x liečia (žr. § 3, 11 apibrėžimą) kiekvieną $F \in F$, t. y.

$$x \in \tilde{F}, \text{ kokią bepaimtumė } F \in F; \quad (5.1)$$

čia $\tilde{F}$ – aibės F uždarinys; kitais žodžiais,

$$x \in \bigcap \{ \tilde{F} : F \in F \}. \quad (5.1)$$

(Pakanka, kad x liestų kiekvieną $F \in B$, kur B – kokia nors filtro F bazė, nes tada x lies ir kiekvieną $F \in F$.)

* Tiksliau, erdvė turi būti dar ir atskiriama (žr. 2 apibrėžimą).

Pavyzdžiui, sakykime, erdvėje X duota sekà

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X. \quad (5.2)$$

Pažymėkime F filtrą (erdvėje X), kurio bazė yra Frešės filtro vaizdas, gautas su (5.2) funkcijos pagalba. (Tokią situaciją jau turėjome § 4, 1 pavyzdyje, tik ten erdvė buvo žymima Y .) Jei $x \in X$ liečia šį filtrą F , tai x vadinamas sekos (x_n) ribiniu tašku (nepainiokime ribinio taško su riba!). Vadinasi, kokią bepaaimtumę $V \in \mathcal{V}(x)$ ir koks bebūtų $n_0 \in \mathbb{N}$, egzistuoja toks $n > n_0$, kad $x_n \in V$. Pavyzdžiui, seka $n \mapsto 1 + (-1)^n \in \mathbb{R}$ turi du ribinius taškus: 0 ir 2.

1 pratimas. Jei x – filtro F riba, tai x liečia filtrą F . Sekos atveju tai reiškia, kad sekos riba yra tos sekos ribiniu tašku, bet ne atvirkščiai (žr. minėtą pavyzdį $n \mapsto 1 + (-1)^n$; ši seka erdvėje $\mathbb{R}$ neturi ribos).

1 teiginys. Topologinėje erdvėje X sekančios savybės yra ekvivalentiškos:

(C) jei $F \subset \mathcal{P}(X)$ – filtras, tai egzistuoja $x \in X$, liečiantis filtrą F ;

(B–L) jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ – erdvės X atvirų aibių šeima, padengianti erdvę X (t. y. $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$), tai egzistuoja toks baigtinis poaibis

$B \subset A$, kad šeima* $(U_\alpha)_{\alpha \in B}$ padengia X (t. y. $X = \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$).

Savybė (B–L) vadinama Borelio – Lebego aksioma.

Įrodymas. Perėjus prie papildinių, (B–L) ekvivalentiška šitokiai savybei:

(C₁) jei uždarytųjų aibių šeimos $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ sankirta $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$, tai egzistuoja baigtinis $B \subset A$ toks, kad $\bigcap_{\alpha \in B} F_\alpha = \emptyset$.

Tikrai, jei $F_\alpha = \overline{CU_\alpha}$, tai $\bigcup U_\alpha = X \Leftrightarrow \bigcap F_\alpha = \emptyset$ (patikrinkite!).

Todėl pakanka įrodyti $(C) \Leftrightarrow (C_1)$. $(C) \Rightarrow (C_1)$ gausime, įrodysdami, kad „jei ne (C₁), tai ne (C)“ (plg. praeito paragrafo teoremos įrodymo formą). Tarkime, kad (C₁) negalioja, ir uždarytųjų ai-

* Kai $B \subset A$, šeima $(U_\alpha)_{\alpha \in B}$ yra vadinama šeimos $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ pošeimiui.

bių šeimos $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ sankirta $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$, tačiau kiekvienam baigtiniam $B \subset A$ yra $\bigcap_{\alpha \in B} F_\alpha \neq \emptyset$. Tai, kad $\bigcap_{\alpha \in B} F_\alpha \neq \emptyset$, kai B — aibės A baigtinis poaibis, reiškia, jog aibės F_α turi savybę (FG) (žr. § 2), todėl generuoja filtrą — tarkime, filtrą F . Šio filtro nelielia joks taškas. Tikrai, jei x liestų F , tai x priklausytų sankirtai $\bigcap \{ \bar{F} : F \in F \}$ (žr. (5.1)), todėl ir sankirtai $\bigcap \{ F_\alpha : \alpha \in A \}$ (nes $F_\alpha \in F$ ir $\bar{F}_\alpha = F_\alpha$ dėl F_α uždarumo); taigi būtų $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$.

(C) $\Leftarrow$ (C₁) irgi gausime, įrodydami teiginį „jei ne (C), tai ne (C₁)“. Jei nėra x -so, kuris liestų filtrą F , tai $\bigcap_{F \in F} \bar{F} = \emptyset$ (žr. (5.1)), o kadangi $\bar{F} \in F$ (nes $F \subset \bar{F}$), tai dėl 4 išvados iš filtro apibrėžimo (24p.) $\bigcap_{\beta \in B} \bar{F}_\beta \neq \emptyset$, kokią bepaimtume aibių sistemos $\{ \bar{F} : F \in F \}$ baigtinę šeimą $(\bar{F}_\beta)_{\beta \in B}$. Tuo būdu, erdvės X uždary aibių šeimai $(\bar{F})_{F \in F}$ negaliojant savybė (C₁). ●

2 apibrėžimas. Topologinė erdvė, kurioje galioja (C) (arba, tas pats, (B–L)), vadinama kvazikompaktiška. Kvazikompaktiška atskiriama erdvė vadinama kompaktiška erdve. Aibė X' topologinėje erdvėje X vadinama kvazikompaktiška (kompaktiška), jei ji kaip poerdvis yra kvazikompaktiška (kompaktiška) erdvė.

2 teiginys. Aibė X' topologinėje erdvėje X yra kvazikompaktiška tada ir tik tada, kai X' turi sekančią savybę:

jei $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ — erdvės X atvirų aibių šeima, padengianti aibę X' , tai egzistuoja toks baigtinis poaibis $B \subset A$, kad šeima $(U_\alpha)_{\alpha \in B}$ taip pat padengia aibę X' (t. y. $X' \subset \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$).

Įrodymas. Poerdvio X' atviras padengimas visada turi tokį pavidalą: $(U_\alpha \cap X')_{\alpha \in A}$; čia $X' \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, U_α — aibės, atviros erdvėje X . ●

Jau sakėme, kad skaičių intervalas $[a, b]$ yra kompaktiškas erdvėje $\mathbb{R}$. Todėl jei realiųjų skaičių sekos (x_n) visi nariai priklauso kažkuriam intervalui $[a, b]$ (tokiu atveju dar sakoma, kad seka (x_n) yra apribota), tai nors vienas $x \in [a, b]$ yra tos sekos ribinis taškas. Išplėstoji tiesė $\overline{\mathbb{R}}$ yra homeomorfiška $[a, b]$ ($a < b$), todėl kompaktiška. Kadangi bet kurios realiųjų skaičių sekos (x_n) nariai priklauso $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, tai dėl $\overline{\mathbb{R}}$ kompaktiškumo nors vienas $x \in \overline{\mathbb{R}}$ yra sekos (x_n) ribinis taškas (tik tas x nebūtinai priklauso $\mathbb{R}$: jis gali būti $-\infty$ arba $+\infty$).

1 teorema. Kad filtras F kompaktiškoje erdvėje turėtų ribą, būtina ir pakanka, kad jį liestų tik vienas taškas.

Įrodymas. ($\Rightarrow$) Jei x – filtro F riba, tai $V(x) \subset F$. Jei y liečia F , tai bet kuri $V \in V(y)$ turi bendrų taškų su kiekviena $F \in F$, tame skaičiuje ir su bet kuria $U \in V(x)$. Dėl erdvės atskiriamumo tai yra galima tik tokiu atveju, kai $y = x$. (Šioje įrodymo dalyje savybė (C) nesirėmėme.)

($\Leftarrow$) Dėl (C) kompaktiškoje erdvėje filtrą F liečia bent vienas taškas. Įrodysime, kad jei F neturi ribos, tai jį liečia ne mažiau kaip du taškai (todėl jei F liečia tik vienas taškas, tai F negali neturėti ribos). Jei F neturi ribos ir x liečia F (dėl (C), kaip minėjome, toks x egzistuoja), tai atsiras $U \in V(x)$, $U \not\subset F$ (nes jei kiekviena taško x aplinka priklausytų filtrui F , tai x būtų jo riba), t. y. nė viena $F \in F$ neguli aibėje U ; kitais žodžiais, $F \cap (CU) \neq \emptyset$, kokią bepaimtume $F \in F$. Todėl aibių rinkinys $\{F \cap (CU) : F \in F\}$ yra filtro bazė (patikrinkite!); pažymėkime šį filtrą F_1 . Dėl (C) egzistuoja x_1 , liečiantis filtrą F_1 . Kadangi taško x aplinka U nesikerta su filtro F_1 sieteliais $F \cap (CU)$, tai x neliečia filtro F_1 , t. y. $x \neq x_1$. Bet $F \supset F \cap (CU)$, todėl $F \in F_1$, t. y. $F \subset F_1$. Iš to gauname, kad taškas x_1 liečia ir filtrą F (tikrai, jei bet kuri taško x_1 aplinka V turi bendrų taškų su kiekviena $F_1 \in F_1$, tai V turi bendrų taškų ir su kai kuriomis iš jų – būtent, su aibėmis $F \in F$). ●

Pavyzdžiui, dėl $\overline{\mathbb{R}}$ kompaktiškumo, kad realiųjų skaičių seka (x_n) turėtų erdvėje $\overline{\mathbb{R}}$ ribą, būtina ir pakanka, kad ši seka turėtų tik vieną ribinį tašką x . Tas x gali būti realusis skaičius (t. y. $x \in \mathbb{R}$), o gali būti ir $-\infty$ arba $+\infty$.

3 teiginys. Jei X – kvazikompaktiška, o Y – bet kokia topologinė erdvė ir $f: X \rightarrow Y$ – tolydi funkcija, tai $f(X)$ (kaip erdvės Y poerdvis) – kvazikompaktiška.

Įrodymas. Tikrinsime (B – L) galiojimą (tiksliau, savybės aprašytos 2 teiginyje, galiojimą). Jei $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, tai $X = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(V_\alpha)$. Dėl f tolydumo, jei V_α – atvira, tai $f^{-1}(V_\alpha)$ – atvira (žr. § 3, 5 teiginį). Tuo būdu, imdami visas V_α atviras, turėsime, kad $(f^{-1}(V_\alpha))_{\alpha \in A}$ yra erdvės X atviras padengimas, ir dėl X kvazikompaktiškumo egzistuoja baigtinė $B \subset A$ tokia, kad $X = \bigcup_{\alpha \in B} f^{-1}(V_\alpha)$. Tada $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in B} V_\alpha$. ●

Aibė $Y \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta, jei $Y \subset [a, b]$; čia $a, b \in \mathbb{R}$. § 7 įrodysime, kad realiosios tiesės $\mathbb{R}$ poerdvis Y yra kompaktiškas tada ir tik tada, kai Y yra uždara aprėžta aibė erdvėje $\mathbb{R}$. Todėl, jei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – tolydi, o X – kvazikompaktiška, tai $f(X)$ – uždara aprėžta aibė erdvėje $\mathbb{R}$, t. y. *funkcija f yra „aprėžta“*, kaip įprasta sakyti apie funkciją $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, kurios reikšmių aibė $f(X)$ yra aprėžta. Jei įžiūrėsime, kad erdvėje $\mathbb{R}$ uždara aprėžta aibė turi ir mažiausią, ir didžiausią elementą, tai iš to gausime, kad tolydi funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (kur X – kvazikompaktiška) „pasiekia“ savo didžiausią ir mažiausią reikšmę. Tuo atveju, kai $X = [c, d]$, $c, d \in \mathbb{R}$, šie du faktai vadinami Vejerštraso teoremomis.

2 teorema. *Jei X – kvazikompaktiška, Y – atskiriama, o $f: X \rightarrow Y$ – tolydi ir injektyvi, tai f yra homeomorfizmas X ant $f(X)$ kaip erdvės Y poerdvio. (Todėl X iš tikrųjų yra kompaktiška, nes $f(X)$ – atskiriama.)*

Teoremos įrodymas remiasi dviem nedidelėmis lemomis.

1 lema. *Uždara aibė kvazikompaktiškoje erdvėje yra kvazikompaktiška.*

Įrodymas. Tarkime, kad M – uždara aibė kvazikompaktiškoje erdvėje X . Panašiai kaip 3 teiginio įrodyme, reikia pastebėti, kad jei $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, kur U_α – atvira erdvėje X (visiems $\alpha \in A$),

tai egzistuoja baigtinė $B \subset A$ tokia, kad $M \subset \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$. Kadangi atviros aibės CM ir U_α ($\alpha \in A$) padengia kvazikompaktišką erdvę X , tai jau baigtinis jų kiekis padengia X , t. y. egzistuoja baigtinė

$B \subset A$ tokia, kad aibės CM ir $U_\alpha (\alpha \in B)$ padengia X . Tada $M \subset \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$, nes $(CM) \cap M = \emptyset$. ●

2 lema. *Atskiriamoje erdvėje kompaktiškos aibės yra uždaros.*

Įrodymas. Tarkime, kad K – kompaktiška aibė atskiriamoje erdvėje X ir $x \in \overline{K}$. Įrodysime, kad $x \in K$. Vadinasi, $\overline{K} = K$, todėl K – uždara (žr. § 3, 18 pratimą). Imkime taško x visų aplinkų filtrą $V(x)$. Jei $U \in V(x)$, tai $U \cap K \neq \emptyset$ (žr. § 3, 11 apibrėžimą), todėl aibės $U \cap K$ ($U \in V(x)$) sudaro filtrą aibėje K (patikrinkite!); pažymėkime šį filtrą F . Dėl (C) egzistuoja $y \in K$, kuris liečia F , t. y. bet kuri taško y aplinka V turi bendrą tašką su kiekviena aibe $U \cap K$, t. y. su kiekviena $U \in V(x)$. Kadangi X – atskiriama, vadinasi, $y = x$, t. y. $x \in K$. ●

2 teoremos įrodymas. Kadangi $f : X \rightarrow f(X)$ – bijekcija ir tolydi, tai belieka pastebėti, kad $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ yra tolydi. Tam reikia įrodyti, kad bet kurios atviros aibės $U \subset X$ pirmavaizdis $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ yra atvira aibė erdvėje $f(X)$ arba, perėjus prie papildinių, kad bet kurios uždaros aibės $M \subset X$ pirmavaizdis $(f^{-1})^{-1}(M) = f(M)$ yra uždara aibė erdvėje $f(X)$. Kadangi uždara $M \subset X$ yra kvazikompaktiška (žr. 1 lemą), tai $f(M)$ – kompaktiška (3 teiginys ir Y atskiriamumas), todėl uždara (2 lema). ●

Yra teisinga šitokia Tichonovo teorema:

3 teorema. *Jei X_α – kvazikompaktiška (visiems $\alpha \in A$), tai erdvių sandauga $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ yra kvazikompaktiška. Jei X_α – kompaktiškos, tai $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ – kompaktiška.*

Įrodymą žr. [3]. Tačiau jei $A = \{1, 2, \dots, n\}$, įrodymas lengvas.

2 pratimas. Įrodykite Tichonovo teoremą, kai $A = \{1, 2\}$, t. y. kad $X_1 \times X_2$ – (kvazi) kompaktiška, jei X_1 ir X_2 – (kvazi) kompaktiškos. Po to įrodykite atveju $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

4 teiginys. *Jei K – kompaktiška aibė metrinėje erdvėje X , tai K – uždara ir aprėžta.* (Sakoma, kad K aprėžta, jei egzistuoja $x_0 \in X$ ir $r > 0$ tokie, kad rutulys $S(x_0, r)$ aprėpia aibę K .)

I rodymas. Kompaktiška aibė K metrinėje erdvėje yra uždara (žr. 2 lemą), o padengę ją baigtiniu kiekiu rutulių $S(x_0, 1)$, $S(x_1, 1)$, ..., $S(x_n, 1)$ ($x_0, x_1, \dots, x_n \in K$), matome, kad $K \subset S(x_0, r)$; čia $r \geq 1 + \max_{i=1, \dots, n} \rho(x_0, x_i)$. Tikrai, jei $x \in K$, tai $x \in S(x_j, 1)$ kažkuriam $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, todėl $\rho(x_0, x) \leq \rho(x_0, x_j) + \rho(x_j, x) < r$. ●

§ 6. TOLYGIOSIOS ERDVĖS

Šis paragrafas skirtas erdvės pilnumo ir funkcijos tolygaus tolydumo sąvokoms išaiškinti. Pirmiausia – kai kurie žymėjimai.

Tarkime, kad X – aibė. Aibės $X \times X$ diagonalė yra aibė $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$. Jei $P \subset X \times X$, tai $P^{-1} = \{(x', x) : (x, x') \in P\}$; jei ir $Q \subset X \times X$, tai

$$P \circ Q = \{(x, x') \in X \times X : \text{egzistuoja toks } x'' \in X, \text{ kad } (x, x'') \in Q \text{ ir } (x'', x') \in P\} \quad (6.1)$$

1 apibrėžimas. *U-sistema aibėje X – tai aibės $P(X \times X)$ netuščias poaibis U , turįs savybes (F_I) , (F_{II}) (žr. filtro apibrėžimą, § 2) ir*

(U_I) jei $P \in U$, tai $\Delta \subset P$;

(U_{II}) jei $P \in U$, tai $P^{-1} \in U$;

(U_{III}) jei $P \in U$, tai egzistuoja tokia $Q \in U$, kad $Q \circ Q \subset P$. U -sistemos U baze vadinamas bet kuris toks $B \subset U$, kad jei $P \in U$, tai egzistuoja $Q \in B$, $Q \subset P$.

1 pratimas. Jei $X \neq \emptyset$, tai U yra filtras aibėje $X \times X$.

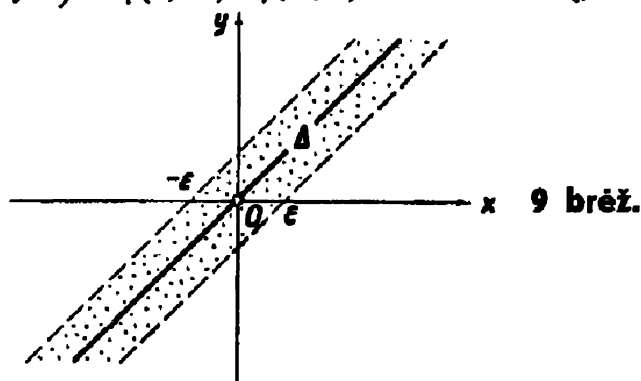
Pavyzdys. Tarkime, kad X – metrinė erdvė su metrika ρ . Aibės

$$B_\epsilon = \{(x, x') \in X \times X : \rho(x, x') < \epsilon\} \quad (6.2)$$

(ϵ – bet koks teigiamas realusis skaičius) sudaro U -sistemos bazę, t.y. aibės $X \times X$ poaibiai, aprėpiantys (6.2) pavidalo aibes, yra U -sistema aibėje X ; žymėkime tą U -sistemą raide M . (Jei $X = \mathbb{R}$, tai B_ϵ yra juosta, pavaizduota 9 brėžinyje.)

Irodysime tai. M netuščia. Jei $P \in M$, t. y. $P \supset B_\epsilon$, o $P_1 \supset P$, tai $P_1 \supset B_\epsilon$, todėl $P_1 \in M$. Taigi M turi (F_I) savybę. Tarkime, kad

$P, Q \in M$ ir $B_\varepsilon \subset P, B_\delta \subset Q$; tada $B_\alpha \subset P \cap Q$, kai α neviršija mažesniojo iš ε ir δ . Tuo būdu, $P \cap Q \in M$, ir M turi (F_{II}) savybę. Kadangi $\rho(x, x) = 0 < \varepsilon$, tai $\Delta \subset B_\varepsilon$, todėl $\Delta \subset P$, kokią beimtume $P \in M$ ((U_I) savybę). Iš $\rho(x, x') = \rho(x', x)$ darome išvadą, kad jei $B_\varepsilon \subset P$,



tai $B_\varepsilon \subset P^{-1}$ ((U_{II}) savybę). Dėl $\rho(x, x'') \leq \rho(x, x') + \rho(x', x'')$ (trikampio nelygybė) yra

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ B_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_\varepsilon,$$

todėl M turi ir (U_{III}) savybę (būtent, jei $B_\varepsilon \subset P$, tai $B_{\frac{\varepsilon}{2}} \circ B_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset P$). ●

2 pratimas. Aibės $B_{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) sudaro ką tik aprašytos U -sistemos M bazę. Aibės $B_{\frac{1}{n}}$ ($n = 1, 2, \dots$) taip pat sudaro U -sistemos M bazę.

Sakykime, aibėje X duota U -sistema U . Imdami bet kuriuos $x \in X$ ir $P \in U$, pažymėkime

$$V_{x, P} = \{x' \in X : (x, x') \in P\}. \quad (6.3)$$

1 teiginys. Funkcija $X \ni x \mapsto \{V_{x, P} : P \in U\} \subset P(X)$ yra T -funkcija.

2 apibrėžimas. Topologija aibėje X , apibrėžta šios T -funkcijos, vadinama tolygiąja topologija, gauta iš U -sistemos U , o topologinė erdvė X su šia topologija – tolygia erdve.

Pavyzdžiui, metrinėje erdvėje aibė $V_{x, B_\varepsilon} = \{x' : \rho(x, x') < \varepsilon\}$, t. y. $V_{x, B_\varepsilon} = S(x, \varepsilon)$ (žr. (3.10)*). Tuo būdu, metrinės erdvės topologija yra tolygi, ir metrinė erdvė yra tolygi erdvė.

* (3.10) formulėje metrika buvo žymima $| |$, o čia – raide ρ .

1 teiginio įrodymas. Reikia patikrinti, kad aibės X poaibių rinkinys $V(x) = \{V_{x,P} : P \in U\}$ yra filtras, turįs (V_I) savybę, ir, be to, funkcija $x \mapsto V(x)$ tenkina sąlygą (V_{II}) (žr. § 3, 1 apibrėžimą). $V(x)$ netuščia, nes U netuščia. Jei $V_{x,P} \subset E$, tai $E = V_{x,P_1}$, kur $P_1 = P \cup \{(x, x') : x' \in E \cap (C V_{x,P})\}$, t. y. $V(x)$ turi (F_I) savybę. Sankirta $V_{x,P} \cap V_{x,Q} = V_{x,P \cap Q}$, taigi, $V(x)$ tenkina aksiomą (F_{II}) . Kadangi $(x, x) \in P$ (nes $\Delta \subset P$), tai $x \in V_{x,P}$ (savybė (V_I)), todėl $V_{x,P} \neq \emptyset$ (reiškia, ir (F_{III}) galioja). Beliko įrodyti, kad bet kuriai $V_{x,P}$ egzistuoja tokia $W \in V(x)$, kad, kiekvienam $y \in W$, $V_{x,P} \in V(y)$. Dėl (U_{III}) rasime $Q \in U$, kad $Q \circ Q \subset P$. Tada galima imti $W = V_{x,Q}$. Tikrai, jei $y \in V_{x,Q}$, tai $V_{y,Q} \subset V_{x,P}$ (todėl $V_{x,P} \in V(y)$). Įrodykime, kad $V_{y,Q} \subset V_{x,P}$. Jei $x' \in V_{y,Q}$, tai $(y, x') \in Q$ (žr. (6.3)); kadangi $y \in V_{x,Q}$, tai ir $(x, y) \in Q$; todėl $(x, x') \in Q \circ Q \subset P$ (žr. (6.1)), t. y. $x' \in V_{x,P}$. ●

Dar vienas žymėjimas: funkcija $f : X \rightarrow Y$ apibrėžia funkciją

$$X \times X \ni (x, x') \mapsto (f(x), f(x')) \in Y \times Y, \quad (6.4)$$

žymimą simboliu $f \times f$.

3 pratimas. Kas būtų $f \times f \times \dots \times f$ (n kartų), jei $f : X \rightarrow Y$?

4 pratimas. Jei X ir Y – topologinės erdvės, o $f : X \rightarrow Y$ – tolydi, tai ir $f \times f$ tolydi. Analogiškai, ir $f \times \dots \times f : X \times \dots \times X \rightarrow Y \times \dots \times Y$ tolydi (čia $f \times \dots \times f$, $X \times \dots \times X$, $Y \times \dots \times Y$, – n dauginamųjų, $n \geq 1$).

3 apibrėžimas. Tarkime, kad X ir Y – tolygios erdvės, kurių tolygiosios topologijos gautos iš U -sistemų $U \subset P(X \times X)$, $\tilde{U} \subset P(Y \times Y)$. Sakoma, kad funkcija $f : X \rightarrow Y$ yra tolygiai tolydi, jei $(f \times f)^{-1}(\tilde{P}) \in U$, kokią beimtume $\tilde{P} \in \tilde{U}$. Kitais žodžiais:

bet kuriai $\tilde{P} \in \tilde{U}$ egzistuoja tokia $P \in U$ (aplamai, P priklauso nuo $\tilde{P}$ parinkimo), kad $(f(x), f(x')) \in \tilde{P}$, jei $(x, x') \in P$. (6.5)

2 teiginys. Tolygiai tolydi funkcija yra tolydi.

Įrodymas. Imkime taško $f(x)$ kokią nors aplinką $V_{f(x), \tilde{P}}$. Jei $P \in U$ – aibė, minima (6.5) sąlygoje, tai $f(V_{x,P}) \subset V_{f(x), \tilde{P}}$.

(t. y. f tolydi bet kuriame taške $x \in X$). Įrodykime, kad $f(V_{x, \rho}) \subset \subset V_{f(x), \tilde{\rho}}$. Iš tikrųjų $x' \in V_{x, \rho}$ reiškia, kad $(x, x') \in P$. Dėl (6.5) $(f(x), f(x')) \in \tilde{P}$, t. y. $f(x') \in V_{f(x), \tilde{\rho}}$. ●

Tarkime, kad X – metrinė erdvė su metrika ρ , o Y – metrinė erdvė, turinti metriką $\tilde{\rho}$. (6.2) pavidalo aibę erdvėje Y žymėsime $\tilde{B}_\varepsilon$, t. y. $\tilde{B}_\varepsilon = \{(y, y') \in Y \times Y : \tilde{\rho}(y, y') < \varepsilon\}$. Funkcijos $f : X \rightarrow Y$ tolygus tolydumas reiškia, kad, kokį bepaimtumė $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks $\delta > 0$ (aplamai, priklausantis nuo ε), kad $(f(x), f(x')) \in \tilde{B}_\varepsilon$, jei $(x, x') \in B_\delta$, t. y.

$$\tilde{\rho}(f(x), f(x')) < \varepsilon, \text{ kai } \rho(x, x') < \delta. \quad (6.6)$$

Pavyzdžiui, jei $X = Y = \mathbb{R}$, tai (6.6) sąlyga užrašoma šitaip:

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon, \text{ kai } |x' - x| < \delta. \quad (6.7)$$

Pastaba. Metrinių erdvių X, Y atveju išsiaiškinkime, kuo skiriasi funkcijos $f : X \rightarrow Y$ tolydumas nuo tolygaus tolydumo. Jei $f : X \rightarrow Y$ – tolydi, o $x \in X$, tai taško $f(x)$ aplinkai $S(f(x), \varepsilon) = \{y \in Y : \tilde{\rho}(f(x), y) < \varepsilon\}$ egzistuoja taško x aplinka $S(x, \delta) = \{x' \in X : \rho(x, x') < \delta\}$, kad $f(S(x, \delta)) \subset S(f(x), \varepsilon)$, t. y.

$$\tilde{\rho}(f(x), f(x')) < \varepsilon, \text{ jei } \rho(x, x') < \delta.$$

Kuo šitai skiriasi nuo (6.6)? – Tuo, kad dabar δ priklauso ne tik nuo ε , bet ir nuo x , kai (6.6) sąlygoje δ nuo x nepriklausė. Kitaip sakant, jei $f : X \rightarrow Y$ – tolygiai tolydi (čia X, Y – metrinės erdvės), tai $f(x)$ ir $f(x')$ bus ε -artimi, jei x ir x' yra δ -artimi (duotam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta > 0$), nepriklausomai nuo to, kurioje erdvės X vietoje yra taškas x .

Pavyzdžiui, funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ yra tolydi, bet nėra tolygiai tolydi. Tikrai, paėmus $\varepsilon > 0$, koks bebūtų $\delta > 0$, rasime tokį $x_0 > 0$, kad $\frac{\varepsilon}{x_0} < \delta$, ir tada kiekvienas $x \in \left] x_0 + \frac{\delta}{2}, x_0 + \delta \right[$ turės savybę $|x - x_0| < \delta$, bet bus $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| > \frac{\delta}{2} \cdot 2x_0 > \varepsilon$. (Funkcijos $x \mapsto x^2$ tolydumą paliekame patikrinti pačiam skaitytojui.)

4 apibrėžimas. Filtras F tolygioje erdvėje X vadinamas *Košio filtru*, jei bet kuriai $P \in U$ egzistuoja $F \in F$ (bendrai imant, F priklauso nuo P parinkimo) tokia, kad $F \times F \subset P$.

Pavyzdžiui, imkime seką $N \ni n \mapsto x_n \in X$ tolygioje erdvėje X , ir, sakykime, F – filtras, kurio bazė yra Frešės filtro E vaizdas, gautas su funkcijos $n \mapsto x_n$ pagalba; jei F yra Košio filtras, tai sakoma, kad (x_n) yra Košio seka. Vadinas, kokią bėpaimtume $P \in U$, egzistuoja $n_0 \in N$ (aplamai, n_0 priklauso nuo P parinkimo), kad

$$\left. \begin{array}{l} m > n_0 \\ n > n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x_m, x_n) \in P \quad (6.8)$$

(plg. (4.5)).

Kai X – metrinė erdvė, bet kuri $P \in M$ aprėpia B_ϵ pavidalo aibę, todėl (x_n) bus Košio seka tada ir tik tada, kai kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuos $n_0 \in N$ (priklausantis, bendrai imant, nuo ϵ), kad $(x_m, x_n) \in B_\epsilon$, kai $m > n_0$ ir $n > n_0$, t. y. kai

$$\left. \begin{array}{l} m > n_0 \\ n > n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \epsilon. \quad (6.9)$$

Jei $X = R$, (6.9) sąlyga taip atrodo:

$$\left. \begin{array}{l} m > n_0 \\ n > n_0 \end{array} \right\} \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon. \quad (6.10)$$

3 teiginys. Jei F – Košio filtras tolygioje erdvėje X ir $F \subset F_1$, kur $F_1 \subset P(X)$ – filtras, tai ir F_1 – Košio filtras.

Irodymas. Aibei $P \in U$ imsime $F \in F$, kad $F \times F \subset P$; ši F priklauso ir filtrui F_1 . ●

4 teiginys. Bet kurio taško x visų aplinkų filtras $V(x)$ tolygioje erdvėje yra Košio filtras.

Irodymas. Paėmus bet kokią $P \in U$, egzistuoja $Q_1 \in U$, kad $Q_1 \circ Q_1 \subset P$ (žr. (U_{III})). Kadangi $Q_1^{-1} \in U$ (dėl (U_{II})), tai ir $Q = Q_1 \cap Q_1^{-1} \in U$. Tada $Q^{-1} = Q_1^{-1} \cap Q_1 = Q^*$ ir

$$V_{x, Q} \times V_{x, Q} \subset P. \quad (6.11)$$

* Aibė $Q \subset X \times X$, turinti savybę $Q^{-1} = Q$, yra vadinama *simetriška*.

Tikrai, $(x', x'') \in V_{x, Q} \times V_{x, Q}$ tada ir tik tada, kai $(x, x') \in Q$ ir $(x, x'') \in Q$. Dėl Q simetriškumo ir $(x', x) \in Q$, todėl $(x', x'') \in Q \circ Q \subset Q_1 \circ Q_1 \subset P$. (6.11) pareinamybė ir reiškia, kad $V(x)$ yra Koši filtras. ●

5 teiginys. Jei filtras F tolygioje erdvėje turi ribą, tai F yra Koši filtras.

Įrodymas. $V(x) \subset F$, kur x – filtro F riba, ir lieka panaudoti 4 ir 3 teiginius. ●

5 apibrėžimas. Tolygi erdvė X vadinama pilna, jei bet kuris Koši filtras joje turi ribą.

Pavyzdžiui, R^n ($n \geq 1$) yra pilna (apie tai žr. § 7).

Kaip 2 pratime minėjome, aibės $B_{\mathbb{Q}-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) sudaro U -sistemos M bazę. Imkime bendriau.

6 teiginys. Tarkime, kad aibės $P_n \in U$ ($n \in \mathbb{N}$) sudaro U -sistemos $U \subset P(X \times X)$ bazę. Tokiu atveju tolygi erdvė X bus pilna tada ir tik tada, kai bet kuri Koši seka joje turės ribą.

Įrodymas. Reikia įrodyti, kad jei aibės P_n sudaro U -sistemos $U \subset P(X \times X)$ bazę ir jei kiekviena Koši seka erdvėje X turi ribą, tai bet kuris Koši filtras erdvėje X turi ribą. Tarkime, kad $F \subset P(X)$ – Koši filtras. Aibei $P_n \in U$ egzistuoja tokia $F'_n \in F$, kad $F'_n \times F'_n \subset P_n$ (žr. 4 apibrėžimą). Imkime $F_0 = F'_0$, o bet kuriam $n > 0$ – $F_n = F_{n-1} \cap F'_n$. Remiantis filtro aksioma (F_{II}), $F_n \in F$. Kadangi $F_n \subset F'_n$, tai $F_n \times F_n \subset P_n$; be to, $F_n \subset F_{n-1}$, $F_n \neq \emptyset$ (žr. (F_{III})), ir galime imti seką (x_n) , kad $x_n \in F_n$. Ši seka yra Koši seka, nes bet kuri $P \in U$ aprėpia bazinę aibę P_n , todėl jei $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, tai $x_m \in F_m \subset F_n$, $x_n \in F_n \subset F_n$; reiškia, $(x_m, x_n) \in F_n \times F_n \subset P_n \subset P$, ir žr. (6.8). Tarkime, kad x yra sekos (x_n) riba. Įrodysime, kad x yra ir filtro F riba, t. y. kad bet kuri taško x aplinka $V_{x, P}$ aprėpia kažkurią $F \in F$. Imkime $Q \in U$, kad $Q \circ Q \subset P$ (žr. (U_{III})), ir toki $n \in \mathbb{N}$, kad 1) $x_n \in V_{x, Q}$ ir 2) $F_n \times F_n \subset Q$. Tada $F_n \subset V_{x, P}$. Iš tikrųjų, jei $x' \in F_n$, tai $(x_n, x') \in F_n \times F_n \subset Q$. Be to, $(x, x_n) \in Q$ (nes $x_n \in V_{x, Q}$); todėl $(x, x') \in Q \circ Q \subset P$, reiškia, $x' \in V_{x, P}$. ●

5 pratimas. Jei x liečia Koši filtrą F , tai x yra filtro F riba (būtent, x -so aplinkoje $V_{x, P}$ guli F , jei $F \times F \subset Q$; čia $Q \circ Q \subset P$). (Samprotaukite kaip 6 teiginio įrodymo pabaigoje.)

1 teorema. *Jei X — kompaktiška erdvė, tai egzistuoja — ir tik viena — U -sistema $U \subset P(X \times X)$, su kurios pagalba apibrėžiama tolygioji topologija sutampa su pradine erdvės X topologija. Būtent, U yra diagonalės $\Delta \subset X \times X$ visų aplinkų aibė (erdvėje $X \times X$).*

Čia įrodysime du teiginius, o pilną teoremos įrodymą žr. [3].

7 teiginys. *Tarkime, kad X — tolygi erdvė, kurios tolygioji topologija apibrėžta U -sistemos U . Tada bet kuri $P \in U$ yra diagonalės Δ aplinka erdvėje $X \times X$.*

Įrodymas. (6.11) priklausomybė rodo, kad $(x, x) \in \text{Int} P$, kokį beimtume $x \in X$, t. y. $\Delta \subset \text{Int} P$. ●

8 teiginys. *Jei tolygioji erdvė X yra kompaktiška, tai kiekviena diagonalės Δ aplinka erdvėje $X \times X$ priklauso U -sistemai U , apibrėžiančiai erdvės X topologiją.*

Šio teiginio įrodymui panaudosime lemą:

Lema. *Jei X — atskiriama tolygi erdvė, o taškas (a, b) liečia filtrą U , tai $a = b$, t. y. $(a, b) \in \Delta$. (Kaip visada, U yra U -sistema, apibrėžianti erdvės X tolygiąją topologiją.)*

Įrodymas. Jei $a \neq b$, tai dėl X atskiriamumo egzistuoja taško a aplinka V_{a, P_1} ir taško b aplinka V_{b, P_2} , neturinčios bendrų elementų. Paėmus $P = P_1 \cap P_2$, tuo labiau bus $V_{a, P} \cap V_{b, P} = \emptyset$. Egzistuoja simetriška $Q \in U$, kad $Q \circ Q \subset P$ (kaip 4 teiginio įrodyme). Tada taško (a, b) aplinka $V_{a, Q} \times V_{b, Q}$ nesikerta su Q (taigi (a, b) neličia filtro U), nes jei $(x, y) \in (V_{a, Q} \times V_{b, Q}) \cap Q$, tai $x \in V_{a, Q}$, reiškia, $(a, x) \in Q$, ir $(x, y) \in Q$, todėl $(a, y) \in Q \circ Q \subset P$, t. y. $y \in V_{a, P}$. Be to, $y \in V_{b, Q}$, t. y. $(b, y) \in Q \subset P$, todėl $y \in V_{b, P}$; ir turėtume prieštaravimą: $V_{a, P} \cap V_{b, P} = \emptyset$ ir $y \in V_{a, P} \cap V_{b, P}$. ●

8 teiginio įrodymas. Tarkime priešingai: sakykime, egzistuoja diagonalės Δ aplinka W , nepriklausanti U -sistemai U , t. y. nė viena P neguli aibėje W . Tada $(CW) \cap P \neq \emptyset$, kokią bepaimtume $P \in U$, todėl aibės $(CW) \cap P$ ($P \in U$) sudaro filtro bazę (aibėje $X \times X$); pažymėkime tą filtrą G . Jei X — kompaktiška, tai $X \times X$ — kompaktiška (žr. praeito paragrafo 2 pratimą), todėl egzistuoja taškas $(a, b) \in X \times X$, liečiantis G . Tas $(a, b) \notin \Delta$, nes W neturi bendrų taškų su $(CW) \cap P$. Iš kitos pusės, kadangi $(CW) \cap P \subset P$,

tai $U \subset G$, taigi, (a, b) liečia ir filtrą U . Gavome prieštaravimą: dėl lemos $(a, b) \in \Delta$, o juk $(a, b) \notin \Delta$! ●

9 teiginys. *Kompaktiška erdvė yra pilna.*

Įrodymas. Kompaktiška erdvė yra tolygi erdvė (žr. 1 teorema), ir galima žiūrėti, ar ji pilna. Dėl kompaktiškumo kiekvienas filtras turi ribinį tašką (žr. (C), § 5), todėl ir bet kuris Koši filtras turi ribinį tašką. Bet Koši filtro ribinis taškas yra jo riba (žr. 5 pratimą). ●

2 teorema. *Jei $f : X \rightarrow Y$ – tolydi funkcija, kur X – kompaktiška, o Y – tolygi erdvė, tai f – tolygiai tolydi funkcija.*

Įrodymas. Minėjome, kad $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$ – tolydi (žr. 4 pratimą). Jei $\tilde{P} \in \tilde{U}$ ($\tilde{U}$ – erdvės Y U -sistema), tai $\tilde{P}$ yra diagonalės $\tilde{\Delta} \subset Y \times Y$ aplinka (žr. 7 teiginį), todėl $(f \times f)^{-1}(\tilde{P})$ yra diagonalės $\Delta \subset X \times X$ aplinka, taigi, dėl 1 teoremos $(f \times f)^{-1}(\tilde{P}) \in U$ (U – erdvės X U -sistema). ●

Pavyzdžiui, jei $X = [a, b]$, o $Y = \mathbb{R}$, tai 2 teorema yra klasikinė Kantoro teorema apie funkcijos, tolydžios uždaramame intervale, tolygų tolydumą.

Pažiūrėkime, kas yra tolygios erdvės poerdvis. Jei X – tolygi erdvė, kurios U -sistema yra U , ir $X' \subset X$, tai žinome, kad X' turi erdvės X poerdvio topologiją, būtent, jei $x \in X'$, tai poerdvyje X' taško x bet kuri aplinka turi pavidalą $V \cap X'$, kur V – kokia nors taško x aplinka erdvėje X , t. y. šiuo atveju $V = V_x, P$ ($P \in U$). Pasirodo, kad X' yra tolygi erdvė, kurios U -sistemą sudaro aibės $P \cap (X' \times X')$ ($P \in U$). Tikrai, šios aibės turi visas tas savybes, kurių reikalauja 1 apibrėžimas. Pavyzdžiui, (U_{III}): jei $Q \circ Q \subset P$, tai $[Q \cap (X' \times X')] \circ [Q \cap (X' \times X')] = (Q \circ Q) \cap (X' \times X')$. (Kitas savybes skaitytojas taip pat lengvai gali patikrinti.) Be to, jei $x \in X'$, tai $V_{x, P \cap (X' \times X')} = \{x' \in X : (x, x') \in P \cap (X' \times X')\} = \{x' \in X' : (x, x') \in P\} = V_{x, P} \cap X'$, t. y. X' , kaip poerdvio, topologija sutampa su tolygiaja topologija, gauta iš U -sistemos $\{P \cap (X' \times X') : P \in U\}$.

10 teiginys. *Pilnos erdvės X uždara aibė M yra pilnas poerdvis.*

Įrodymas. Jei F – Koši filtras poerdvyje M , t. y. bet kuriai $P \in U$ egzistuoja toks $F \in \mathcal{F}$, kad $F \times F \subset P \cap (M \times M)$, tai $F \times F \subset P$,

vadinasi, filtras G (erdvėje X), kurio bazė yra F , taip pat yra Koši filtras. Dėl X pilnumo G turi ribą, tarkime x , t. y. $V_x, P \in G$, jei $P \in U$. Priklausomybė $V_x, P \in G$ reiškia, kad $F \subset V_x, P$; čia F – kažkuris filtro F sietelis. Tuo būdu, $F \subset V_x, P \cap M$ (nes $F \subset M$). Tai rodo, pirma, kad kiekviena x -so aplinka turi bendrą taškų su aibe M , t. y. $x \in \bar{M}$, taigi, $x \in M$ (nes $\bar{M} = M$ dėl M uždarumo); antra, kad $V_x, P \cap M \in F$, t. y. kad taško $x \in M$ kiekviena aplinka poerdvyje M priklauso filtrui F , vadinasi, x yra filtro F riba poerdvyje M . Tuo įrodėme, kad kiekvienas Koši filtras $F \subset P(M)$ turi ribą poerdvyje M , t. y. M – pilna. ●

11 teiginys. Tarkime, kad X – tolygi atskiriama erdvė (gal ir nepilna). Jei poerdvis $M \subset X$ yra pilnas, tai M – uždara aibė erdvėje X .

Įrodymas. Imsime neuždarą aibę M ir įrodysime, kad, kaip poerdvis, M nėra pilna. Jei M – neuždara, tai $\bar{M} \neq M$, todėl egzistuoja taškas $a \in \bar{M}$ nepriklausantis aibei M . Tada aibės $V \cap M$, kur $V \in V(a)$, sudaro filtrą aibėje M (patikrinkite!); pažymėkime jį G . G yra Koši filtras. Iš tikro, $V(a)$ yra Koši filtras erdvėje X (žr. 4 teiginį), t. y. bet kuriam $P \in U$ rasime $V \in V(a)$, kad $V \times V \subset P$, todėl $(V \cap M) \times (V \cap M) \subset P \cap (M \times M)$. Filtras G neturi ribos poerdvyje M , nes jei $x \in M$ būtų jo riba, tai ir x , ir a liestų Koši filtrą $F \subset P(X)$, kurio bazė G , todėl ir x , ir a būtų filtro F ribos (žr. 5 pratimą), kas yra neįmanoma, kadangi atskiriamoje erdvėje joks filtras negali turėti dviejų ribų. ●

Dar (be įrodymo) suformuluosime vieną principinę teoremą.

3 teorema. Jei X – atskiriama tolygi erdvė, tai egzistuoja pilna atskiriama tolygi erdvė $\hat{X}$, kurios poerdvis yra X ; be to, aibė X yra tiršta erdvėje $\hat{X}$.

Ši $\hat{X}$ vadinama pilna erdve, gauta papildžius erdvę X . Galima įrodyti ir tokios $\hat{X}$ vienintelumą. Apie visa tai žr. [3].

Pavyzdžiui, realioji tiesė $\mathbb{R}$ gaunama, papildžius (3 teoremos prasme) racionaliųjų skaičių erdvę $\mathbb{Q}$ kaip metrinę erdvę su metrika $\rho(p, q) = |q - p|$; $p, q \in \mathbb{Q}$.

§ 7. REALIOJI TIESĖ

Kaip sakėme §6 (be įrodymo), *realioji tiesė $\mathbb{R}$ yra pilna ir gali būti gauta, papildant racionaliųjų skaičių erdvę $\mathbb{Q}$* . Kadangi neaprašėme konstrukcijos, kaip atliekamas tas papildymas, tai šioje knygutėje erdvės $\mathbb{R}$ pilnumas lieka neįrodytas.

Šiame § aptarsime keletą erdvės $\mathbb{R}$ pilnumo ekvivalentų (1 teorema) ir įrodysime svarbią teoremą, kad rišli aibė realiojoje tiesėje yra intervalas (2 teorema). Kiti teiginiai yra nesudėtingos šių teoremų išvados.

1 apibrėžimas. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}$. Jei egzistuoja toks $b \in \mathbb{R}$, kad $x \leq b$, kokį bepaimtume $x \in X$, tai sakoma, kad aibė X yra aprėžta iš viršaus, o b vadinamas aibės X viršutiniu rėžiu.

Pavyzdžiui, jei $X =] - \infty, 0[$, tai bet kuris teigiamas skaičius yra aibės X viršutinis rėžis; nulis taip pat yra aibės $] - \infty, 0[$ viršutinis rėžis.

1 pratimas. Jei b yra aibės X viršutinis rėžis, o $c > b$, tai ir c yra aibės X viršutinis rėžis.

2 apibrėžimas. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta iš viršaus. Pažymėkime raide B aibės X visų viršutinių rėžių aibę. Jei aibė B turi mažiausią elementą, tarkime b_0 (t. y. tokį $b_0 \in B$, kad $b \geq b_0$, kokį bepaimtume $b \in B$), tai b_0 vadinamas aibės X tiksliuoju viršutiniu rėžiu ir žymimas $\sup X$ (skaitome: „supremum X “).

Pavyzdžiui, jei $X =] - \infty, 0[$, tai $B = [0, +\infty[$ ir $0 = \sup X$. Jei $X = [-1; 1]$, tai $B = [1, +\infty[$ ir $1 = \sup X$. Aibė $\mathbb{N}$ nėra aprėžta iš viršaus. $\sup \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \max \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ (žr. (1.23)).

1 teiginys. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta iš viršaus. Realusis skaičius b_0 yra $\sup X$ tada ir tik tada, kai, pirma, b_0 yra aibės X viršutinis rėžis ir, antra,

kokį bepaimtume $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks $x \in X$ (bendrai imant, x priklauso nuo ε), kad $x > b_0 - \varepsilon$. (7.1)

Įrodymas. ($\Rightarrow$) Jei $b_0 = \sup X$, tai b_0 yra aibės X viršutinis rėžis (žr. 2 apibrėžimą). Jei kažkuriam $\varepsilon_0 > 0$ būtų $x \leq b_0 - \varepsilon_0$, kokį bepaimtume $x \in X$, tai skaičius $b_0 - \varepsilon_0$ taip pat būtų aibės X

viršutinis rėžis, ir jis mažesnis už b_0 , t. y. b_0 nebūtų mažiausias iš viršutinių rėžių.

($\Leftarrow$) Tarkime, kad aibė X viršutinis rėžis b_0 turi (7.1) savybę. Jei $c < b_0$, tai $c = b_0 - \epsilon$, kur $\epsilon = b_0 - c$, ir egzistuoja $x \in X$, $x > c$. Taigi joks $c \in \mathbb{R}$, mažesnis už b_0 , nėra aibės X viršutinis rėžis, ir b_0 yra mažiausias aibės X viršutinis rėžis. ●

Analogiškai aibė $X \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta iš apačios, jei egzistuoja toks $a \in \mathbb{R}$, kad $x \geq a$ visiems $x \in X$; skaičius a tada vadinamas aibės X apatiniu rėžiu. Didžiausias iš apatinių rėžių vadinamas aibės X tiksliuoju apatiniu rėžiu ir žymimas $\inf X$ (skaitome: „infimum X “). Skaičius $a_0 \in \mathbb{R}$ yra aibės X tikslusis apatinis rėžis, kai a_0 yra aibės X apatinis rėžis ir, be to,

koks bebūtų $\epsilon > 0$, egzistuoja toks $x \in X$ (aplamai, x priklauso nuo ϵ), kad $x < a_0 + \epsilon$. (7.1')

(Įrodymas analogiškas 1 teiginio įrodymui.) $\inf \{c_1, \dots, c_n\} = \min \{c_1, \dots, c_n\}$.

2 teiginys. Jei $X \subset \mathbb{R}$ – uždara ir $b_0 = \sup X$, tai $b_0 \in X$; jei $a_0 = \inf X$, tai ir $a_0 \in X$.

Įrodymas. Dėl (7.1) b_0 liečia aibę X , t. y. $b_0 \in \overline{X}$. Bet $\overline{X} = X$, nes X – uždara. Analogiškai apie $\inf X$. ●

Kaip jau esame sakę, aibė X metrinėje erdvėje vadinama aprėžta, jei tą aibę aprėpia koks nors rutulys $S(x_0, r)$. Tiesės atveju tai reiškia, kad $X \subset]a, b[$ arba, tas pats, $X \subset [a, b]$ kažkuriems $a, b \in \mathbb{R}$. Tuo būdu, aibė $X \subset \mathbb{R}$ aprėžta tada ir tik tada, kai X aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios. Pavyzdžiui, aibė $X = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ yra aprėžta, $\sup X = 1$, $\inf X = 0$.

1 teorema. Realiojoje tiesėje $\mathbb{R}$ sekančios savybės yra ekvivalentiškos:

1. Jei netuščias poaibis $X \subset \mathbb{R}$ yra aprėžtas iš viršaus, tai egzistuoja $\sup X$.

2. Jei realiųjų skaičių seka (x_n) yra ne mažėjanti (t. y. $x_n \leq x_{n+1}$ visiems $n \in \mathbb{N}$) ir aprėžta iš viršaus (t. y. egzistuoja toks $b \in \mathbb{R}$, kad $x_n \leq b$, kokį bepaimtume $n \in \mathbb{N}$), tai egzistuoja $\lim x_n \in \mathbb{R}$.

3. Jei uždarų intervalų seka $([x_n, y_n])_{n \in \mathbb{N}}$ turi savybę $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$ visiems $n \in \mathbb{N}$, tai $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset$.

4. Bet kuris uždaras intervalas $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) yra kompaktiškas.

5. $\mathbb{R}$ pilna (t. y. kiekvienas Koši filtras $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ turi ribą arba, tas pats, kiekviena Koši seka erdvėje $\mathbb{R}$ turi ribą, žr. § 6, 6 teiginį).

Pastabos. 1 savybė yra ekvivalentiška savybei:

1'. Jei netuščias poaibis $X \subset \mathbb{R}$ yra aprėžtas iš apačios, tai egzistuoja $\inf X$.

Analogiškai 2 savybė yra ekvivalentiška savybei:

2'. Jei realiųjų skaičių seka (x_n) yra ne didėjanti (t. y. $x_n \geq x_{n+1}$ visiems $n \in \mathbb{N}$) ir aprėžta iš apačios (t. y. egzistuoja $a \in \mathbb{R}$, kad $x_n \geq a$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$), tai egzistuoja $\lim x_n \in \mathbb{R}$.

Yra ir kitokių savybių, ekvivalentiškų erdvės $\mathbb{R}$ pilnumui.

3 savybė dar vadinama „įdėtų atkarpų principu“. Siūlome skaitytojui įrodyti, kad bet kuri metrinė erdvė M yra pilna tada ir tik tada, kai joje galioja „įdėtų rutulių principas“:

3'. Jei $(\bar{S}_n)$ – uždarų rutulių seka erdvėje M ir $\bar{S}_n \supset \bar{S}_{n+1}$ visiems $n \in \mathbb{N}$, tai $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{S}_n \neq \emptyset$. Primename, uždaras rutulys $\bar{S}_n$ yra šitokio pavidalo aibė: $\bar{S} = \{x \in M : \rho(x_0, x) \leq r\}$, kur ρ – metrika erdvėje M , x_0 – koks nors fiksuotas erdvės M taškas (rutulio $\bar{S}$ centras), o $r \geq 0$.

1 teoremos įrodymas. Įrodinėsime tokia tvarka: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Tariame, kad 1 savybė galioja. Imkime seką (x_n) , tenkinančią 2 savybės sąlygas (t. y. (x_n) – ne mažėjanti ir aprėžta iš viršaus). Pažymėkime X funkcijos $n \mapsto x_n$ reikšmių aibę, t. y. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. Kadangi $x_n \leq b$ visiems $n \in \mathbb{N}$, tai b yra aibės X viršutinis rėžis. Dėl 1 egzistuoja $b_0 = \sup X$. Įrodysime, kad

$$b_0 = \lim x_n.$$

Jei $\varepsilon > 0$, tai dėl (7.1) egzistuoja $x_{n_0} > b_0 - \varepsilon$. Kadangi $x_n \geq x_{n_0}$, jei $n \geq n_0$, ir $b_0 \geq x_n$ visiems n , tai $x_n \in]b_0 - \varepsilon, b_0] \subset]b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon[$, kai $n \geq n_0$. Taigi $b_0 = \lim x_n$.

2 $\Rightarrow$ 3. Tariaime, kad 2 savybė galioja. Imkime „idėtų atkarpų“ seką $([x_n, y_n])_{n \in \mathbb{N}}$. Kadangi $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$, tai seka (x_n) tenkina 2 savybės sąlygas (būtent, $x_n \leq y_m$, kokius beimtume m ir n iš $\mathbb{N}$), todėl egzistuoja $b_0 = \lim x_n$. Įrodysime, kad $b_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n]$. Kadangi $x_n \leq x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, tai $x_n \leq b_0$; be to, paste-

bėjome, kad bet kuris y_n yra sekos (x_n) viršutinis rėžis, taigi, $b_0 \leq y_n$. Vadinasi, $x_n \leq b_0 \leq y_n$ visiems n , t. y. $b_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n]$.

3 $\Rightarrow$ 4. Tariaime, kad 3 savybė galioja. Įrodysime, kad yra patenkinta § 5 2 teiginyje nurodyta sąlyga. Tarkime priešingai, kad $(U_j)_{j \in J}$ – nebaigtinė atvirų aibių šeima, $[a, b] \subset \bigcup_{j \in J} U_j$, bet

jei tik I – baigtinis aibės J poaibis, tai ne visi intervalo $[a, b]$ taškai priklauso junginiui $\bigcup_{j \in I} U_j$. Padalykime atkarpą $[a, b]$ į

dvi lygias dalis ir pažymėkime $[a_1, b_1]$ tą atkarpą $[a, b]$ pusę, kuri, kaip ir atkarpą $[a, b]$, negali būti padengta jokia baigtine šeima $(U_j)_{j \in I}$. Bent viena iš atkarpų $[a, b]$ pusių turės šią savybę, nes priešingu atveju atkarpą $[a, b]$ bus galima padengti aibėmis U_j , $j \in I$; čia I – kažkoks baigtinis aibės J poaibis. Jei kartais abi pusės turėtų minėtą savybę, tai galima už $[a_1, b_1]$ imti bet kurią iš jų.

Tuo būdu, tarę, kad joks baigtinis šeimos $(U_j)_{j \in J}$ pošeimis nepadengia atkarpų $[a, b]$, radome dvigubai trumpesnę atkarpą $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, kurios taip pat nepadengia joks baigtinis šeimos $(U_j)_{j \in J}$ pošeimis. Todėl su pilnos indukcijos pagalba gauname „idėtų atkarpų“ seką $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ($[a_0, b_0] = [a, b]$), kurios n -sis narys $[a_n, b_n]$ yra $\frac{b-a}{2^n}$ ilgio atkarpa. Dėl 3 sankirta $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$;

tarkime, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Kadangi $x \in [a, b] \subset \bigcup_{j \in J} U_j$, tai egzistuoja

$j_0 \in J$ toks, kad $x \in U_{j_0}$. U_{j_0} yra atvira aibė tiesėje $\mathbb{R}$, todėl galima paimti tokį $\varepsilon > 0$, kad $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U_{j_0}$. Iš kitos pusės, atkarpos $[a_n, b_n]$ ilgis yra $\frac{b-a}{2^n}$, todėl galima rasti tokį didelį n_0 , kad būtų $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Tada atkarpa $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, nes $x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, todėl atstumas nuo x iki pačių tolimiausių atkarpos $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ taškų neviršija atkarpos $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ ilgio $\frac{b-a}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Štai ir gavome prieštaravimą: viena aibė U_{j_0} padengėme atkarpą $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ (ir net visas atkarpas $[a_n, b_n]$, kurių numeris $n \geq n_0$).

4 $\Rightarrow$ 5 įrodymui panaudosime lemą.

Lema. *Košį seka metrinėje erdvėje yra aprėžta.*

[rodymas. Paėmę $\varepsilon = 1$, randame n_0 , kad $\rho(x_m, x_n) < 1$, kai $m \geq n_0$ ir $n \geq n_0$. Pažymėkime $r = \max_{i=1, \dots, n_0} \{\rho(x_0, x_i)\}$. Tada $x_n \in S(x_0, r+1)$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Tikrai, jei $n \leq n_0$, tai $\rho(x_0, x_n) \leq r < r+1$, o jei $n > n_0$, tai $\rho(x_0, x_n) \leq \rho(x_0, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, x_n) < r+1$. ●

Dabar 4 $\Rightarrow$ 5. Tariame, kad 4 savybė galioja. Dėl lemos egzistuoja $a, b \in \mathbb{R}$, kad Košį seka (x_n) yra seka kompaktiškoje erdvėje $[a, b]$. Todėl (x_n) turi ribą erdvėje $[a, b]$, todėl ir erdvėje $\mathbb{R}$ (žr. § 6,9 teiginį).

5 $\Rightarrow$ 1. Tariame, kad 5 savybė galioja. Imkime kokį nors $x \in X$, ir tegul b yra aibės X viršutinis rėžis. Jei $x = b$, tai $b = \sup X$. Jei $x < b$, tai atkarpą $[x, b]$ dalykime pusiau tašku $c = \frac{x+b}{2}$. Yra du atvejai: arba $]c, b] \cap X = \emptyset$, arba $]c, b] \cap X \neq \emptyset$. Jei $]c, b] \cap X = \emptyset$, tai c yra aibės X viršutinis rėžis, ir nagrinėkime atkarpą $[x, c]$. Jei $x' \in]c, b] \cap X$, tai imkime atkarpą $[x', b]$. Abiem atvejais pereiname prie atkarpos $[x_1, b_1]$, kuri turi tokias pat savybes, kaip pradinė atkarpa $[x, b]$ (būtent, $x_1 \in X$, o b_1 – aibės X viršutinis rėžis), tačiau atkarpos $[x_1, b_1]$ ilgis $\leq \frac{b-x}{2}$. Atlikdami aprašytąją procedūrą atkarpai $[x_1, b_1]$, gausime atkarpą $[x_2, b_2]$, kur $x_2 \in X$, o b_2 – aibės X viršutinis rėžis, ir $b_2 - x_2 \leq \frac{b-x}{2}$ ir t. t. (skaičiuojas čia turi įsitikinti, kad atliekame pilną indukciją). Jei $x_n = b_n$, tai $b_n = \sup X$, o jei jokiame n nepasitaikys $x_n = b_n$, tai gausime

„įdėtų atkarpų“ seką $([x_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ($[x_0, b_0] = [x, b]$), kur $b_n - x_n \leq \frac{b-x}{2^n}$. Todėl (x_n) yra (ne mažėjanti) Koši seka (tikrai, jei n_0 – toks didelis, kad $\frac{b-x}{2^{n_0}} < \varepsilon$, tai $|x_m - x_n| < \varepsilon$, kai $m \geq n_0$ ir $n \geq n_0$, nes $x_m, x_n \in [x_{n_0}, b_{n_0}]$, o $b_{n_0} - x_{n_0} \leq \frac{b-x}{2^{n_0}}$). Del $\mathbb{R}$ pilnumo (juk ta-
rėme, kad 5 savybė galioja) egzistuoja $\lim x_n$; pažymėkime šią
ribą r . Įrodysime, kad $r = \sup X$. Jei $x' > r$, tai, paėmę $\varepsilon' = x' - r$,
rasime n'_0 , kad $|x_n - r| < \frac{\varepsilon'}{2}$ ir $\frac{b-x}{2^n} < \frac{\varepsilon'}{2}$, kai $n \geq n'_0$. Tada $b_n < x'$,
kai $n \geq n'_0$, nes $b_n - x_n \leq \frac{b-x}{2^n}$. Todėl $x' \notin X$. Reiškia, jei $x' \in X$, tai
 $x' \leq r$, t. y. r yra aibės X viršutinis rėžis. Toliau, imdami bet kurį $\varepsilon'' > 0$,
rasime n''_0 , kad $x_n \in]r - \varepsilon'', r + \varepsilon''[$, kai $n \geq n''_0$, t. y. $x_n > r - \varepsilon''$.
Tuo būdu, skaičius r turi ir (7.1) savybę. ●

3 teiginys. *Aibė $X \subset \mathbb{R}$ yra kompaktiška tada ir tik tada, kai X – uždara ir aprėžta.*

[rodymas. ($\Rightarrow$) žr. § 5, 4 teiginį.

($\Leftarrow$) Jei X – uždara erdvėje $\mathbb{R}$ ir $X \subset [a, b]$, tai X uždara ir kompaktiškoje erdvėje $[a, b]$. Belieka remtis § 5, 1 lema. ●

4 teiginys. *$X \subset \mathbb{R}$ yra intervalas (t. y. viena iš (1.6) ar (3.11) pavidalo aibių) tada ir tik tada, kai bet kuriems $a, b \in X$ ($a \leq b$) atkarpa $[a, b] \subset X$.*

[rodymas. ($\Rightarrow$) ižiūrėti paliekame patiems skaitytojams.

($\Leftarrow$) pailiustruosime pora atvejų. Jei X neaprėžta nei iš viršaus, nei iš apačios, tai, kokį beimtume $x \in \mathbb{R}$, rasime tokius $a, b \in X$, kad $a \leq x \leq b$; kadangi $[a, b] \subset X$, tai $x \in X$, todėl bet kuris $x \in \mathbb{R}$ yra aibės X elementas, t. y. $X = \mathbb{R}$. Jei X aprėžta iš viršaus, bet neaprėžta iš apačios, tai, kokį beimtume $x < b_0 = \sup X$, atsiras $a, b \in X$, kad $a \leq x \leq b < b_0$. Kadangi $[a, b] \subset X$, tai bet kuris $x < b_0$ priklauso X . Turint omeny, kad nė vienas skaičius, didesnis už b_0 , nepriklauso aibei X (nes b_0 – aibės X viršutinis rėžis), tai X yra arba intervalas $] -\infty, b_0[$, arba intervalas $] -\infty, b_0]$. Kitus atvejus paliekame patikrinti skaitytojams. ●

2 teorema. *Aibė $X \subset \mathbb{R}$ yra rišli tada ir tik tada, kai X yra intervalas (t. y. kai bet kuriems $a, b \in X$, $a \leq b$, atkarpa $[a, b] \subset X$).*

Įrodymas. ($\Rightarrow$) Jei $a, b \in X$, $a < b$, ir $a < x_0 < b$, bet $x_0 \notin X$, tai atviros* aibės $]-\infty, x_0[\cap X$, $]x_0, +\infty[\cap X$ turi § 3, 9 apibrėžime minimas savybes, todėl X – nerišli.

($\Leftarrow$) Jei X – nerišli, tai $X \subset U \cup V$, kur U, V – atviros aibės erdvėje $\mathbb{R}$, o $U \cap X$ ir $V \cap X$ – netuščios ir nesikerta. Todėl egzistuoja $a \in U \cap X$ ir $b \in V \cap X$, $a \neq b$; tarkime, pavyzdžiui, kad $a < b$. Įrodysime, kad egzistuoja $x_0 \in]a, b[$, nepriklausantis aibei X , t. y. kad X nėra intervalas. Vadinasi, rišli $X \subset \mathbb{R}$ negali būti ne intervalas.

Imkime atkarpos $[a, b]$ vidurį $c = \frac{a+b}{2}$. Jei $c \notin X$, tai darbas baigtas: $c \in]a, b[$ ir $c \notin X$. Jei $c \in X$, tai arba $c \in U$, arba $c \in V$. Pirmu atveju nagrinėjame atkarpą $[c, b]$, antru atveju – $[a, c]$. Pažymėkime šią nagrinėjamą atkarpą $[a_1, b_1]$. Tuo būdu, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, $a_1 \in U \cap X$, $b_1 \in V \cap X$. Vėl kartojame aprašytą procedūrą: imame atkarpos $[a_1, b_1]$ vidurį $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; jei $c_1 \notin X$, tai įrodymas baigtas, o jei $c_1 \in X$, tai arba $c_1 \in U$, arba $c_1 \in V$. Pirmu atveju imame $[c_1, b_1]$, antru – $[a_1, c_1]$ ir paimtąją atkarpėlę žymime $[a_2, b_2]$; taigi $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$, $a_2 \in U \cap X$, $b_2 \in V \cap X$ ir t. t. (skaitytojas, žinąs, kas yra pilnoji indukcija, sugebės čia ją atlikti visu griežtumu). Jei, kiekvienam n , $c_n = \frac{a_n+b_n}{2} \in X$, tai gauname „įdėtų atkarpų“ seką $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ($[a_0, b_0] = [a, b]$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$). Dėl $\mathbb{R}$ pilnumo egzistuoja $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Šis x_0 nepriklauso aibei X . Iš tikro, x_0 liečia ir aibę $U \cap X$, ir aibę $V \cap X$, nes bet kuriam $\varepsilon > 0$ galima rasti tokį n , kad būtų $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$, t. y. kad $[a_n, b_n] \subset]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, vadinasi, bet kurioje taško x_0 aplinkoje yra aibės $U \cap X$ taškų a_n ir aibės $V \cap X$ taškų b_n . Todėl jei x_0 priklausytų aibei X , tai priklausytų vienai iš atvirų aibių U, V . Pavyzdžiui, jei x_0 priklausytų aibei U , tai U , kaip taško x_0 aplinka, kirstųsi su $V \cap X$, todėl aibės $U \cap X$ ir $V \cap X$ turėtų bendrą tašką x , kas yra negalima: juk padarėme prielaidą, kad $U \cap X$ ir $V \cap X$ nesikerta. ●

* Atviros poerdvyje X .

Šios teoremos (ir § 3, 8 teiginio) betarpiškos išvados yra klasikinės Koši—Bolcano teoremos, kurias čia suformuluojame. Duota tolydi funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (kur $X \subset \mathbb{R}$ — intervalas) ir $a, b \in X$ ($a < b$).

I teorema. Jei $f(a)f(b) < 0$ (t. y. $f(a)$ ir $f(b)$ yra skirtingų ženklų), tai egzistuoja toks $c \in]a, b[$, kad $f(c) = 0$.

II teorema. Koks bebūtų y , esantis tarp skaičių $f(a)$ ir $f(b)$, egzistuoja (bent vienas) toks $x \in [a, b]$, kad $f(x) = y$.

Tikrai, dėl X rišlumo ir f tolydumo $f(X)$ yra rišli (§ 3, 8 teiginys), t. y. $f(X)$ — intervalas (2 teorema). $f(a)$ ir $f(b)$ priklauso intervalui $f(X)$, todėl ir atkarpos, jungiančios $f(a)$ su $f(b)$, kiekvienas taškas y priklauso intervalui $f(X)$. ●

3 apibrėžimas. Funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, kur $X \subset \mathbb{R}$, vadinama didėjančia, jei

$$x, x' \in X, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'); \quad (7.2)$$

tokiu atveju dar sakoma, kad f yra ne mažėjanti. Jei

$$x, x' \in X, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'), \quad (7.3)$$

tai $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ vadinama griežtai didėjančia. Analogiškai, jei

$$x, x' \in X, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'), \quad (7.2')$$

tai $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ vadinama mažėjančia (arba dar sakoma, kad f — ne didėjanti), o jei

$$x, x' \in X, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'). \quad (7.3')$$

— tai griežtai mažėjančia. Jei pasakyta, kad $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — monotoniška, tai turima omeny, kad yra viena iš dviejų: arba f yra didėjanti (t. y. turi (7.2) savybę), arba mažėjanti (t. y. f turi (7.2') savybę). Analogiškai apie griežtą monotoniškumą: tada vietoj (7.2) arba (7.2') figūruoja (7.3) arba (7.3') savybės.

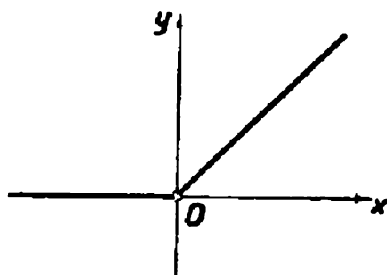
Jei $X = \mathbb{N}$, t. y. jei funkcija f yra seka, tarkime, $n \mapsto x_n$, tai sakoma, kad seka (x_n) yra didėjanti (ne mažėjanti)*, griežtai didėjanti, mažėjanti (ne didėjanti)**, griežtai mažėjanti, monotoniška, griežtai monotoniška — žiūrint, kokia yra funkcija $n \mapsto x_n$ 3 apibrėžimo terminologijoje.

Pavyzdžiui, funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ (2 brėž. pavaizduotas jos grafikas) yra griežtai didėjanti; funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x+|x|}{2} \in \mathbb{R}$ yra tik didėjanti (jos grafiką žr. 10 brėžinyje); funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ nėra monotoniška; seka $n \mapsto 1 + (-1)^n$ nėra monotoniška. Bet $]-\infty, 0] \ni$

* Šią savoką jau naudojome I teoremoje (žr. 73 p.).

** Ir šią savoką jau turėjome (žr. 2' pastabą, 74 p.).

$\exists x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ir $[0, +\infty[\ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ yra monotoniškos (netgi griežtai monotoniškos): pirmoji – mažėjanti, antroji didėjanti. Tai rodo, kaip svarbu tiksliai žinoti funkcijos apibrėžimo sritį, jei kalbame apie funkcijos monotoniškumą.



10 brėž.

3 teorema. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}$ – intervalas (t. y. viena iš (1.6) ar (3.11) pavidalo aibių). Kad funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ būtų homeomorfizmas erdvės X ant erdvės $f(X)$, būtina ir pakanka, kad funkcija f būtų, pirma, tolydi ir, antra, griežtai monotoniška. Tada $f(X)$ yra taip pat intervalas.

Įrodymas. ($\Rightarrow$) Jei $f: X \rightarrow f(X)$ – homeomorfizmas, tai, visų pirma, f yra injekcija. Todėl jei $a, b \in X$ ir $a < b$, tai $f(a) \neq f(b)$. Yra dvi galimybės: arba $f(a) < f(b)$, arba $f(a) > f(b)$. Tarkime, pavyzdžiui, kad $f(a) > f(b)$ (atveji $f(a) < f(b)$ analogiškai išsinagrinės pats skaitytojas). Įrodysime, kad tada f griežtai mažėja intervale X (atveju $f(a) < f(b)$ būtų griežtai didėjanti intervale X). Jei $a < c < b$, tai $c \in X$ (žr. 4 teiginį), ir $f(c)$ nelygus nei $f(a)$, nei $f(b)$ (nes f – injekcija). Pastebėsime, kad $f(a) > f(c) > f(b)$. Tikrai, jei būtų, pavyzdžiui, $f(b) > f(c)$, tai intervalo $[a, c]$ vaizdas $f([a, c])$, kuris dėl f tolydumo yra rišli aibė (žr. § 3, 8 teiginį), aprėptų intervalą $[f(c), f(a)]$, ir kadangi $f(b) \in [f(c), f(a)]$, tai egzistuotų toks $x \in [a, c]$, kad $f(x) = f(b)$, kas prieštarautų tam, jog $f: X \rightarrow f(X)$ – bijekcija. (Analogiškai samprotautume, jei būtų $f(c) > f(a)$). Iš to jau ir gauname, kad f yra griežtai mažėjanti intervale X :

$$\text{jei } x \in]a, b[, \text{ tai } f(a) > f(x) > f(b); \quad (*)$$

$$\text{jei } x < a, \text{ tai } f(x) > f(a) > f(b), \quad (**)$$

nes atvejai $f(a) > f(x) > f(b)$ ir $f(b) > f(x)$ negalimi dėl savybės (*);

$$\text{jei } x > b, \text{ tai } f(b) > f(x)$$

(analogiškai, kaip (**)); į šias formules įstatę $b=y$, gauname $f(x)>f(y)$, jei tik $x, y \in X$ ir $x < y$.

Galima atkreipti dėmesį, kad naudojomės tik tuo, kad $f: X \rightarrow \rightarrow f(X)$ – bijekcija (t. y. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – injekcija) ir kad f – tolydi.

($\Leftarrow$) Jei f – tolydi, tai $f(X)$ – rišli, todėl $f(X)$ yra intervalas. Dėl f griežto monotoniškumo, jei X neturi galų (t. y. X yra atviras intervalas), tai ir $f(X)$ neturi galų, o jei $x_0 \in X$ – intervalo X kuris nors galas, tai ir $f(x_0)$ – intervalo $f(X)$ galas. Bet kuriems $a, b \in X$ ($a \leq b$) $f|_{[a, b]}: [a, b] \rightarrow f([a, b])$ yra homeomorfizmas (žr. § 5, 2 teoremą), todėl f^{-1} yra tolydi kiekviename taške $y \in f(X)$.

§ 3 po 8 teiginio pastebėjome, kad $f(X)$ gali būti rišli ir tada, kai f nėra tolydi. Sekantis teiginys yra apie vieną svarbų atvejį, kai $f(X)$ rišlumas ir f tolydumas yra ekvivalentiškai dalykai.

5 teiginys. *Jei $X \subset \mathbb{R}$ – intervalas, o $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – monotoniška (gal ir negriežtai), tai f yra tolydi tada ir tik tada, kai $f(X)$ – rišli (t. y. intervalas).*

I rodymas. ($\Rightarrow$) § 3, 8 teiginys.

($\Leftarrow$) Tariame, kad $f(X)$ – rišli, t. y. $f(X)$ yra intervalas. Imkime koki nors $x_0 \in X$ ir bet kokią taško $y_0 = f(x_0)$ aplinką V erdvėje $\mathbb{R}$. Aplinka V aprėpia aplinką $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ (kur $\varepsilon > 0$ pakankamai mažas), o kadangi $f(X)$ – intervalas, tai taško y_0 aplinka (poerdvyje $f(X)$) $V \cap f(X)$ aprėpia taško y_0 aplinką (poerdvyje $f(X)$) $[c, d]$. Dėl f monotoniškumo $f^{-1}([c, d])$ yra taško x_0 aplinka (poerdvyje X), turinti pavidalą $[a, b]$. Todėl $f^{-1}(V) \supset f^{-1}([c, d])$ yra taško x_0 aplinka poerdvyje X , ir f tolydi. (Pilniau: $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$, jei f – didėjanti, ir $a = f^{-1}(d)$, $b = f^{-1}(c)$, jei f – mažėjanti.)

Panaudodami šį teiginį, lengvai įrodoma paprasčiausių elementarių funkcijų tolydumą. Pavyzdžiui, funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2^x \in \mathbb{R}$ – didėjanti (net griežtai didėjanti), jos reikšmių aibė yra intervalas $]0, +\infty[$, todėl ši funkcija tolydi. Iš 3 teoremos, be to, gauname, kad funkcija $\mathbb{R} \ni x \mapsto 2^x \in]0, +\infty[$ yra homeomorfizmas; jai atvirkštinė (irgi tolydi) funkcija yra $]0, +\infty[\ni y \mapsto \log_2 y \in \mathbb{R}$. Funkcijos $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in \mathbb{R}$ tolydumas įrodomas taip: kiekviename intervale $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right] (k \in \mathbb{Z})$ funkcija $x \mapsto \sin x$ monotoniška, o reikšmės užpildo

intervalą $[-1; 1]$. Todėl ši funkcija tolydi kiekviename iš minėtų intervalų, reiškia, — ir visoje tiesėje $\mathbb{R}$, nes intervalai $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ padengia $\mathbb{R}$. Tolydžiai funkcijai $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \mapsto \sin x \in [-1; 1]$ pritaikę 3 teoremą, matome, kad ši funkcija yra homeomorfizmas; kaip §1 minėjome, jai atvirkštinė funkcija yra $[-1; 1] \ni y \mapsto \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; tuo būdu, ji irgi tolydi.

Betarpiskai patikrinę, kad funkcijos

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{R} \times (]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[) \ni (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \in \mathbb{R},$$

$$[0, +\infty[\times [0, +\infty[\ni (x, y) \mapsto x^y \in \mathbb{R}$$

yra tolydžios, ir naudodami § 3, 4 teiginį apie funkcijų kompozicijos tolydumą, gauname, kad elementariosios funkcijos dažniausiai būna savo apibrėžimo srityje tolydžios.

PASTABOS

B. Bolcanas (B. Bolzano, 1781–1848) — čekų matematikas.

E. Borelis (E. Borel, 1871–1956) ir A. Lebegas (H. Lebesgue, 1875–1941) — prancūzų matematikai.

N. Burbaki (N. Bourbaki) — slapyvardis: žymiausieji šių dienų prancūzų matematikai ėmėsi leisti (Euklido pavyzdžiu) „Matematikos elementus“, kuriuose norima išdėstyti 20 amžiaus vidurio matematiką (tiksliau, jos svarbiausius principus ir rezultatus). Kai kurie šios serijos tomai išversti į rusų kalbą. Negalima nepripažinti, kad trumpiausias kelias susidaryti teisingas pažiūras į matematiką — tai Burbaki „Matematikos elementų“ studijavimas.

P. L. Dirichlė (P. L. Dirichlet, 1805–1859) — vokiečių matematikas.

Euklidas (4 amžius prieš m. e.) — senovės graikų matematikas. Svarbiausias jo veikalas — „Elementai“, susidedantis iš 13 knygų. 1–6 knygose dėstoma plokštumos geometrija (šiandien vadinama Euklido geometrija), ir tai yra pagrindinė Euklido „Elementų“ dalis. Euklido dėstymas toks neprikaištingai tikslus, sistemingas ir išsamus, kad „Elementai“ reiškė Euklido geometrijos kaip matematikos šakos vystymosi pabaigą. Iš tiesų, ilgus viduramžius užsiiminėta tik Euklido „Elementų“ perrašinėjimu ir komentarų rašymu. Komentarai daugiausiai lietė Euklido V postulatą (t. y. aksiomą apie lygiagretes). Buvo bandoma įrodyti šį postulatą, bet nesėkmingai, ir tik buvo

gauta eilė V postulato ekvivalentų (pavyzdžiui, „trikampio kampų suma yra ištiestinis kampas“, „egzistuoja panašūs nekongruentiški trikampiai“ ir kt.; smulkiau žr. [6]). Ir tik praeitame šimtetyje pagaliau suvokta, kad vienodai neprieštaringos yra ir toji geometrijos aksiomų sistema, kurioje figūruoja Euklido V postulatas, ir toji, kurioje galioja ne V postulatas, o jo paneigimas. Pastaroji aksiomų sistema yra Lobačevskio geometrijos aksiomų sistema.

F. Hausdorfas (F. Hausdorff, 1868–1942) – vokiečių matematikas, pirmas suformulavęs dabartinį topologinės erdvės apibrėžimą.

G. Kantoras (G. Cantor, 1845–1918) – vokiečių matematikas, laikomas aibių teorijos atradėju.

F. Kleinas (F. Klein, 1849–1925) – vokiečių matematikas. § 3 minima formuluotė paskelbta 1872 m. vadinamojoje „Erlangenų programoje“.

A. L. Koši (A. L. Cauchy, 1789–1857) – prancūzų matematikas.

N. I. Lobačevskis (1792–1856) – rusų matematikas, 1829 m. paskelbė geometrijos, šiandien vadinamos Lobačevskio geometrija, išdėstymą.

J. Bojajis (J. Bolyai, 1802–1860) – vengrų matematikas, 1832 m. paskelbė geometriją, kurią atrado nepriklausomai nuo Lobačevskio, sutampančią su Lobačevskio geometrija.

K. F. Gausas (C. F. Gauss, 1777–1855) – vokiečių matematikas, žinojęs, kad Lobačevskio–Bojajo geometrija yra tiek pat neprieštaringa, kaip ir Euklido geometrija, bet niekur apie tai viešai neskelbęs.

A. N. Tichonovas (gimęs 1906 m.) – tarybinis matematikas.

K. Vejerštrasas (K. Weierstrass, 1815–1897) – vokiečių matematikas.

--- LITERATORA

1. Geometrija. Mokymo priemonė VI klasei. „Šviesa“, Kaunas, 1973.
2. Makaryčevs J., Mindiuk N., Muravinas K. Algebra. Mokymo priemonė VI klasei. „Šviesa“, Kaunas, 1973.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. «Наука», М., 1968.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы, числа... «Наука», М., 1969.
5. Гильберт Д. Основания геометрии, ГИТТЛ, М.-Л., 1948.
6. Каган В. Ф. Основания геометрии, I. ГИТТЛ, М.-Л., 1949.
7. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. «Мир», М., 1966.

TURINYS

Ižanga	3
§ 1. Sąvokos iš aibių teorijos	4
§ 2. Filtrai	22
§ 3. Topologinės erdvės	29
§ 4. Ribos	50
§ 5. Kompaktiškumas	57
§ 6. Tolygiosios erdvės	63
§ 7. Realioji tiesė	72
Pastabos	82
Literatūra	83

Антанас ИОНУШАУСКАС
ЧТО ТАКОЕ ТОПОЛОГИЯ

На литовском языке

Издательство «Минтис», Лит. ССР, г. Вильнюс, 1975

Antanas JONUŠAUSKAS
KAS YRŲA TOPOLOGIJA

Redaktorė N. Žičkienė
Viršelio dailininkas A. Kazakauskas
Meninis redaktorius A. Vitkauskas
Tech. redaktorė D. Andriukonienė
Korektorės A. Ambrazaitė, E. Vonžodienė

Duota rinkti 1974.X.23. Pasirašyta spaudai 1975.IV.22. LV 15523.
Popierius sp. Nr. 1., form. 84×108¹/₃₂ — 4,41 sp. l., 4,25 apsk. l. l.
Tiražas 8000 egz. Kaina Rb 0,16.

Leidykla „Mintis“, Vilnius, Sierakausko g. 15.
Spausdino K. Poželos sp. Kaune, Gedimino 10. Užs. Nr. 1517.
